

Precificação de Opções de Compra do Tipo Asiática usando Simulação de Monte Carlo: uma Comparação entre Diferentes Métodos Amostrais.

Autoria: Jaqueline Terra Moura Marins, Josete Florencio dos Santos, Eduardo Saliby

Resumo

A opção asiática é um tipo de opção exótica, cujo preço final depende da média da trajetória dos preços do ativo ao longo da vida da opção. Uma das suas possíveis formas de avaliação é através da simulação de *Monte Carlo*, que utiliza o método da Amostragem Aleatória Simples como padrão. Entretanto, diversas técnicas de redução de variância têm sido usadas objetivando uma maior eficiência amostral. Este artigo tem como proposta comparar o prêmio de opções de compra asiáticas obtido pela solução analítica de *Black & Scholes*, quando disponível, com os prêmios estimados por simulação de *Monte Carlo*, utilizando os seguintes métodos: Amostragem Aleatória Simples, Variáveis Antitéticas, Variável de Controle, Hipercubo Latino e Amostragem Descritiva. A combinação dos métodos de Variável de Controle com Amostragem Descritiva também foi analisada. Esta combinação obteve o maior ganho de precisão dentre as técnicas de redução de variância testadas. Também constatou-se, nos casos em que a solução analítica proposta por *Black e Scholes* era disponível, que os prêmios estimados convergiram para esta solução.

1 - Introdução

As opções asiáticas fazem parte da família das opções exóticas, podendo ter seus *payoffs* definidos de diversas formas. Uma das formas mais comuns é aquela em que os *payoffs* dependem da média da trajetória dos preços do ativo ao longo da vigência da opção. A média utilizada, por sua vez, pode ser calculada em bases aritméticas ou geométricas. Os pesos atribuídos às observações, por sua vez, podem ser iguais ou flexíveis (Hansen e Jorgensen, 1997).

Segundo Weichert e Lemgruber (2002), a precificação de opções através de simulação foi inicialmente utilizada por Boyle (1977), que desenvolveu um modelo de *Monte Carlo* para simular o processo de geração de preços do ativo-objeto, baseado na premissa de neutralidade ao risco. A avaliação de uma opção asiática, como uma destas aplicações, pode ser realizada por meio da simulação de *Monte Carlo*, aliás, um procedimento muito utilizado para as opções exóticas. Esta técnica de simulação tradicionalmente utiliza a Amostragem Aleatória Simples como método amostral. No entanto, o emprego de técnicas redutoras de variância na simulação de *Monte Carlo* tem apresentado resultados mais robustos, do ponto de vista da precisão das estimativas, do que os obtidos pelo método tradicional (Moreira, 2001; Araújo, 2001; Saliby e Pacheco, 2002).

Este trabalho objetiva aplicar algumas das principais técnicas redutoras de variância na simulação de prêmios de opções de compra asiática e comparar os prêmios estimados por simulação com o prêmio obtido pela solução analítica proposta por *Black e Scholes* (1973). As técnicas de redução de variância utilizadas foram Variáveis Antitéticas, Variável de Controle, Hipercubo Latino e Amostragem Descritiva.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: a segunda seção descreve a metodologia utilizada, identificando-se o tipo de opção asiática que será considerado e o modelo analítico que servirá de parâmetro de comparação para as estimativas obtidas por simulação, além de fazer uma breve apresentação das técnicas de redução de variância empregadas. Na seção 3 estão apresentados os principais resultados obtidos pelas simulações, tais como os prêmios médios, os erros-padrões e o ganho de precisão das estimativas, segundo

os diversos métodos de simulação usados. Por fim, na seção 4, são apresentadas as conclusões.

2 - Metodologia

Charnes (2000) fez uma revisão de alguns artigos que tratavam de métodos de redução de variância, utilizados na simulação de *Monte Carlo* para estimar derivativos. A aplicação de técnicas dessa natureza torna a utilização desta técnica mais atrativa, pois diminui uma grande desvantagem desta simulação, que é a necessidade de uma grande quantidade de replicações para obter resultados precisos. No presente trabalho foi utilizado a simulação de *Monte Carlo* com algumas técnicas destacadas por Charnes (Variáveis Antitéticas, Variável de Controle e Hipercubo Latino). Adicionalmente, utilizou-se a Amostragem Descritiva como outra técnica redutora de variância, apresentada em Saliby (1989). Por fim, foi feita uma combinação da técnica Variável de Controle com a Amostragem Descritiva, as quais, isoladamente, apresentaram os melhores ganhos de precisão das estimativas.

Nesta seção, são apresentados o tipo de opção asiática que será utilizado para testar as técnicas citadas acima e o modelo analítico de *Black e Scholes* (1973), que servirá de parâmetro de comparação para as estimativas obtidas por simulação. A utilização das técnicas de redução de variância também será apresentada.

2.1 – Opções Asiáticas

Existem diversas variações de opções de compra do tipo asiática. Tais variações incluem a possibilidade ou não de exercício antecipado (“*american-style*” ou “*european-style*”), o cálculo da média sobre o preço do ativo-objeto da opção ou sobre o preço de exercício (“*fixed strike*” ou “*floating strike*”) e a consideração da média aritmética ou geométrica nesse último cálculo (“*arithmetic basis*” ou “*geometric basis*”). A forma mais comum de negociação desse tipo de opção, que foi considerada neste trabalho, é a que não permite o exercício antecipado, cujo *payoff* é calculado sobre a média aritmética do preço do ativo-objeto, tendo assim o preço de exercício fixo - “*fixed strike european-style arithmetic asian option*” (Milevsky e Posner, 1998).

Assim sendo, o *payoff* da opção de compra asiática aqui considerado é dado pela seguinte expressão:

$$\text{Payoff} = \max(0; \bar{S} - K)$$

Onde: $\max(.,.)$ = função de máximo entre dois valores;

\bar{S} = média aritmética dos preços do ativo-objeto da opção entre a data atual e a data de vencimento da opção;

K = preço de exercício da opção.

O preço da opção asiática (prêmio) é a média dos valores presentes dos *payoffs* gerados (Hull, 1999). Portanto, neste artigo, foi considerado que o *payoff* da opção será o máximo entre zero e a diferença entre a média aritmética dos preços do ativo-objeto da opção entre a data atual e a data de vencimento da opção e o seu preço de exercício.

2.2 – Solução Analítica de *Black e Scholes*

As opções asiáticas podem ser negociadas de várias formas distintas. Para cada tipo, existem diversas propostas de precificação. Milevsky e Posner (1998) e Neave e Ye (2000)

fazem uma boa revisão da literatura sobre precificação das diversas formas de opções asiáticas, ressaltando que somente aquelas que se baseiam na média geométrica é que possuem soluções analíticas fechadas dentro da estrutura do modelo de Black e Scholes (1973). Isso se deve, principalmente, ao fato de o *payoff*, no caso aritmético, depender da soma de variáveis lognormais correlacionadas, a qual não é lognormal e não possui nenhuma função de distribuição de probabilidade reconhecível.

Assim, no caso das opções asiáticas definidas em bases aritméticas, somente existem soluções aproximadas para o valor do prêmio. Segundo Hull (1999), uma boa aproximação é a própria solução de *Black e Scholes* (1973) para o caso geométrico.

Segundo o modelo de *Black e Scholes* (1973), a solução analítica para o prêmio de uma opção asiática de compra é dada por:

$$C = S_0 * \text{EXP}((-a) * T/252) * N(d1) - K * \text{EXP}(-R_f * T/252) * N(d2) \quad , \text{ equação (1)}$$

Onde:

C = prêmio justo da opção asiática de compra;

S_0 = preço do ativo-objeto da opção no instante zero;

EXP = exponencial;

$a = 0.5 * (R_f + \sigma^2/6)$;

R_f = taxa anual de juros livre de risco;

σ = volatilidade anualizada do ativo-objeto;

T = prazo de vencimento da opção, expresso em anos (252 dias úteis);

K = preço de exercício da opção;

$N(d1)$ = valor da função de distribuição acumulada Normal Padrão no ponto $d1$;

$N(d2)$ = valor da função de distribuição acumulada Normal Padrão no ponto $d2$;

$d1 = (\text{LN}(S_0/K) + (a + 0.5 * \text{sig_a}^2) * T/252) / (\text{sig_a} * \text{Raiz}(T))$;

$d2 = d1 - \text{sig_a} * \text{Raiz}(T/252)$;

$\text{sig_a} = \sigma / \text{Raiz}(3)$.

2.3 – O Modelo de Simulação de *Monte Carlo*

Para se obter uma estimativa do prêmio de uma opção asiática, utilizou-se o modelo de simulação de *Monte Carlo* para simular a trajetória do preço do ativo-objeto da opção ao longo de um período de tempo. Assim como *Black e Scholes* (1973), admitimos neste trabalho que a trajetória de preços do ativo-objeto segue um movimento geométrico browniano, representado pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dSt / St = \mu * dt + \sigma * dW \quad , \text{ equação (2)}$$

Onde:

d = diferencial;

S_t = preço do ativo no instante t;

μ = retorno do ativo;

dt = um diferencial do tempo;

σ = volatilidade do ativo;

dW = processo de *Wiener*.

Com a discretização da equação (2), a adoção da hipótese de neutralidade ao risco ($\mu = R_f$) e o uso do Lema de Itô, é possível chegar à seguinte equação para o preço do ativo na data t, considerando o intervalo de tempo de 1 dia¹:

$$St = St-1 * \text{EXP}[(R_f - \sigma^2/2) * 1/252 + \sigma * \text{Raiz}(1/252) * Zt] \quad , \text{ equação (3)}$$

Onde:

S_t = preço do ativo na data t ;
 S_{t-1} = preço do ativo na data $t - 1$;
 Z_t = variável aleatória normal padrão referente à data t .

O experimento de simulação realizado neste trabalho gerou, em cada uma das 40 corridas de simulação executadas, 1000 trajetórias de 42 dias para o preço do ativo-objeto², com base na equação (1). Em termos matriciais, tal experimento pode ser apresentado da seguinte forma:

Para $j = 1$ a 40 corridas:

$$j\text{-ésima Matriz de Aleatórios } (Z^j) = \begin{pmatrix} Z_{1,1} & Z_{1,2} & Z_{1,3} & \Downarrow & Z_{1,42} \\ Z_{2,1} & . & . & \Downarrow & Z_{2,42} \\ Z_{3,1} & . & . & \Downarrow & Z_{3,42} \\ \vdots & . & . & \Downarrow & \vdots \\ Z_{1000,1} & . & . & \Downarrow & Z_{1000,42} \end{pmatrix}$$

$$j\text{-ésima Matriz de Preços dos Ativo } (S^j) = \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & \vdots & S_{1,42} \\ S_{2,1} & . & . & \vdots & S_{2,42} \\ S_{3,1} & . & . & \vdots & S_{3,42} \\ \dots & & & \vdots & \\ S_{1000,1} & . & . & \vdots & S_{1000,42} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \bar{S}_1 \\ \rightarrow \bar{S}_2 \\ \rightarrow \bar{S}_3 \\ \vdots \\ \rightarrow \bar{S}_{1000} \end{matrix}$$

↓
Médias Aritméticas

$$j\text{-ésimo Vetor dos Payoffs} = \begin{pmatrix} \text{Máx} [0; (\bar{S}_1 - K)] \\ \text{Máx} [0; (\bar{S}_2 - K)] \\ \text{Máx} [0; (\bar{S}_3 - K)] \\ \Downarrow \\ \text{Máx} [0; (\bar{S}_{1000} - K)] \end{pmatrix}$$

$$j\text{-ésimo Vetor dos Valores Presentes dos Payoffs} = \begin{pmatrix} \text{Payoff}_1 * \exp(-R_f * T/252) \\ \text{Payoff}_2 * \exp(-R_f * T/252) \\ \text{Payoff}_3 * \exp(-R_f * T/252) \\ \Downarrow \\ \text{Payoff}_{1000} * \exp(-R_f * T/252) \end{pmatrix}$$

Estimativa j do Prêmio = Média dos 1.000 componentes do j -ésimo Vetor dos Valores Presentes dos Payoffs.

Prêmio Final Estimado = Média das j estimativas obtidas.

Os demais parâmetros da equação (3) são assumidos constantes, conforme o Quadro 1:

Quadro 1 – Síntese dos dados considerados nas simulações		
S₀	Preço inicial ativo-objeto da opção (t=0)	\$55
R_f	Taxa anual de juros livre de risco	3%
K	Preços de exercício (\$)	\$40, \$45, \$50, \$55, \$60, \$65 e \$70
σ	Volatilidade anual do ativo	20%, 30% e 40%;
t	Pontos da Trajetória (dias úteis)	1, 2, ..., 42
T	Prazo de vencimento das opções (dias úteis)	42
	Nº de observações por corrida (trajetórias)	1000
	Nº de corridas	40

Os vários valores de K e σ definiram 21 combinações possíveis dos dois parâmetros, cada qual consistindo em uma opção asiática a ser precificada.

2.4 – Amostragem Aleatória Simples (A.A.S.)

A simulação de Monte Carlo tradicionalmente utiliza a Amostragem Aleatória Simples como método amostral. A aplicação deste método consistiu em sortear aleatoriamente valores da função distribuição acumulada da variável normal padrão Z_t da equação (3). Em seguida, aplicou-se a transformada inversa da função distribuição acumulada sobre os valores sorteados e assim, obteve-se uma amostra de valores para a variável aleatória Z_t .

Apesar de ser o método mais utilizado em simulação, sabe-se que é possível obter estimativas mais precisas, sem um correspondente aumento do esforço de amostragem, com o emprego de técnicas redutoras de variância (Saliby, 1989). As técnicas que foram utilizadas neste trabalho são apresentadas a seguir.

2.5 – Técnicas de Redução de Variância

2.5.1 - Variáveis Antitéticas

A aplicação desta técnica ao caso da precificação de opções asiáticas abordado neste estudo, consiste na geração de valores aleatórios para a variável Z_t da equação (3) e na obtenção de valores correspondentes à variável $-Z_t$ (Charnes, 2000).

A idéia é que se Z_t possui distribuição normal padrão, então $-Z_t$ também possui. A estimativa do prêmio da opção é então calculada pela média entre as duas estimativas intermediárias de prêmio criadas, uma dependente de Z_t e a outra de $-Z_t$. A variância dessa nova estimativa, calculada pela média das estimativas intermediárias, é reduzida, já que a covariância entre as estimativas intermediárias é negativa.

Para a aplicação dessa técnica, a matriz de aleatórios Z de cada corrida de simulação foi redefinida, de modo que suas 500 primeiras linhas fossem iguais às 500 linhas primeiras da matriz Z original e suas 500 últimas linhas fossem iguais ao simétrico das 500 últimas linhas da matriz original Z. A partir disso, novas matrizes de preços do ativo-objeto, de *payoffs* e de valores presentes foram geradas de forma correspondente em cada corrida. A matriz abaixo ilustra esse processo:

$$j\text{-ésima Matriz de Variáveis Antitéticas } (Z_{AV}^j) = \begin{pmatrix} Z_{1,1} & \curvearrowright & Z_{1,42} \\ Z_{2,2} & \curvearrowright & Z_{2,42} \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ Z_{500,1} & \curvearrowright & Z_{500,42} \\ -Z_{501,1} & \curvearrowright & -Z_{501,42} \\ -Z_{502,1} & \curvearrowright & -Z_{502,42} \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ -Z_{1000,1} & \curvearrowright & -Z_{1000,42} \end{pmatrix}$$

2.5.2 – Variável de Controle

O emprego da técnica da Variável de Controle neste estudo, aplica a diferença entre o prêmio obtido por *Black e Scholes* para o caso geométrico e o prêmio geométrico estimado por simulação ao prêmio aritmético estimado por simulação.

A idéia básica desta técnica é promover um ajuste no prêmio aritmético estimado, quando aplica nele essa diferença, que consiste no erro de simulação. Esse erro de simulação é considerado no prêmio aritmético estimado pois, como já explicitado em 2.2, não existe solução analítica para o prêmio no caso do *payoff* ser definido com base na média aritmética dos preços; somente existe quando o *payoff* é definido com base na média geométrica. Dessa forma, o erro de simulação serve como um controle na estimação da opção sem solução analítica.

Conforme proposto por *Broadie e Glasserman* (1996), o emprego desta técnica para a precificação de opções asiáticas por simulação pode ser mais eficiente, quando a aplicação do erro ao prêmio aritmético estimado por simulação leva em consideração o coeficiente angular da regressão entre o prêmio aritmético estimado e o prêmio geométrico estimado, da seguinte forma:

$$PA_{CV} = PA + \beta * (C - PG) \quad , \text{ equação (4)}$$

Onde:

PA_{CV} = prêmio aritmético estimado por variável de controle;

PA = prêmio aritmético estimado por simulação;

β = coeficiente angular da regressão entre PA e PG ;

C = prêmio obtido por *Black e Scholes* para o caso geométrico (solução analítica);

PG = prêmio geométrico estimado por simulação.

Para implementar essa técnica, um novo vetor de *Payoffs*, calculado com base na média geométrica dos preços do ativo-objeto ao longo do tempo, teve de ser criado para cada corrida. Conseqüentemente, foram obtidos, para cada corrida, um vetor de valores presentes dos novos *Payoffs* e uma estimativa do prêmio geométrico. A regressão entre as 40 estimativas do prêmio aritmético (PA) e do prêmio geométrico (PG), foi realizada para se obter o β –coeficiente angular da regressão entre PA e PG , da equação (4). Em seguida foi calculada a média das 40 estimativas de prêmio geométrico para se determinar o PG na equação (4), o mesmo sendo feito para se determinar a PA naquela equação. Finalmente, pôde-se determinar o prêmio aritmético estimado por variável de controle (PA_{CV}).

As matrizes abaixo ilustram o processo :

Para $j = 1$ a 40 corridas:

$$j\text{-ésima Matriz de Preços dos Ativo (S)} = \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & \cap & S_{1,42} \\ S_{2,1} & . & . & \cap & S_{2,42} \\ S_{3,1} & . & . & \cap & S_{3,42} \\ \dots & & & \cap & \\ S_{1000,1} & . & . & \cap & S_{1000,42} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \bar{S}_1 \\ \rightarrow \bar{S}_2 \\ \rightarrow \bar{S}_3 \\ \cap \\ \rightarrow \bar{S}_{1000} \end{matrix}$$

↓
Médias Geométricas

$$j\text{-ésimo Vetor dos Payoffs Geométricos} = \begin{pmatrix} \text{Máx} [0; (\bar{S}_1 - K)] \\ \text{Máx} [0; (\bar{S}_2 - K)] \\ \text{Máx} [0; (\bar{S}_3 - K)] \\ \dots \\ \text{Máx} [0; (\bar{S}_{1000} - K)] \end{pmatrix}$$

$$j\text{-ésimo Vetor V. P. dos Payoffs Geométricos} = \begin{pmatrix} \text{PayoffGeo}_1 * \exp(-R_f * T / 252) \\ \text{PayoffGeo}_2 * \exp(-R_f * T / 252) \\ \text{PayoffGeo}_3 * \exp(-R_f * T / 252) \\ \dots \\ \text{PayoffGeo}_{1000} * \exp(-R_f * T / 252) \end{pmatrix}$$

V.P. = Valor Presente

Estimativa j do Prêmio Geométrico = Média dos 1000 componentes do j-ésimo Vetor dos Valores Presentes dos Payoffs Geométricos.

Prêmio Geométrico Estimado = Média das j estimativas obtidas.

2.5.3 – Hipercubo Latino

O emprego do método de amostragem por Hipercubo Latino consistiu em estratificar a função distribuição acumulada da variável aleatória Z_t normal padronizada em 1000 partes de igual probabilidade e, em seguida, sortear aleatoriamente um valor dentro de cada estrato (ver Charnes, 2000). A transformada inversa da função acumulada da normal padrão foi aplicada sobre esses valores. Finalmente, uma permutação aleatória dos valores foi implementada e a amostra por Hipercubo Latino para a data “t” foi, então, obtida. Esse procedimento foi executado para cada um dos 42 dias da trajetória de preços do ativo e repetido em cada uma das 40 corridas de simulação.

Dessa forma, a matriz de aleatórios Z da equação (3) foi redefinida de forma a conter valores amostrados por Hipercubo Latino e não mais por Amostragem Aleatória Simples.

2.5.4 – Amostragem Descritiva

O uso do método da Amostragem Descritiva na precificação das opções do presente trabalho consistiu, assim como no método do Hipercubo Latino, em estratificar a função distribuição acumulada da variável aleatória Z_t normal padronizada em 1000 partes de igual probabilidade. A diferença entre os dois métodos se deu na forma de seleção dos valores

dentro de cada estrato. Enquanto o Hipercubo Latino faz um sorteio aleatório para a seleção dos valores, a Amostragem Descritiva seleciona o ponto médio de cada estrato (Saliby, 1989, 1990 e 1997).

A partir daí, a aplicação dos dois métodos é semelhante. A transformada inversa da função acumulada da normal padrão foi aplicada sobre os valores selecionados. Finalmente, uma permutação aleatória dos valores foi implementada e a amostra descritiva para a data “t” foi então obtida. Esse procedimento foi executado para cada um dos 42 dias da trajetória de preços do ativo e repetido em cada uma das 40 corridas de simulação.

Vale mencionar que, a cada corrida, a mesma regra de permutação aleatória dos valores componentes da amostra foi implementada nos dois métodos, para se ter um controle a mais na comparação entre eles.

Dessa forma, a matriz de aleatórios Z da equação (3) foi redefinida de forma a conter valores amostrados por Amostragem Descritiva e não mais por Amostragem Aleatória Simples.

2.5.5 – Variável de Controle com Amostragem Descritiva

Esta técnica incorpora a Amostragem Descritiva na estimação do prêmio por Variável de Controle, de forma que os prêmios aritmético e geométrico estimados por simulação simples na equação 4 são substituídos, respectivamente, pelos prêmios aritmético e geométrico estimados por Amostragem Descritiva. A partir daí, o procedimento para a simulação é semelhante ao da Variável de Controle.

3 – Análise dos Resultados

Para avaliar os diferentes métodos de simulação do prêmio de uma opção de compra do tipo asiática, foi utilizada a metodologia apresentada na seção anterior. Além disso, foi analisada a combinação da técnica de Variável de Controle com a Amostragem Descritiva, conforme justificado anteriormente. Os resultados analíticos encontrados para o modelo de *Black e Scholes* (1973) serviram de referência (prêmio justo) para os valores dos prêmios simulados, uma vez que estamos considerando os *payoffs* definidos com base na média aritmética. Esse procedimento foi aplicado a cada uma das 21 opções de compra asiáticas definidas na seção 2, formadas pelas combinações dos 7 valores de preço de exercício (K) com os 3 valores de volatilidade (σ), conforme quadro 1.

Na seção 3.1, a não-tendenciosidade dos prêmios estimados é verificada por meio do cálculo do erro quadrático das estimativas em relação à solução de *Black e Scholes* (1973). Já na seção 3.2, são apresentados os resultados encontrados para a avaliação do ganho de precisão das diversas técnicas amostrais utilizadas, em relação ao método padrão (Amostragem Aleatória Simples) utilizado no modelo de *Monte Carlo*.

3.1 – Análise da não-tendenciosidade dos prêmios estimados

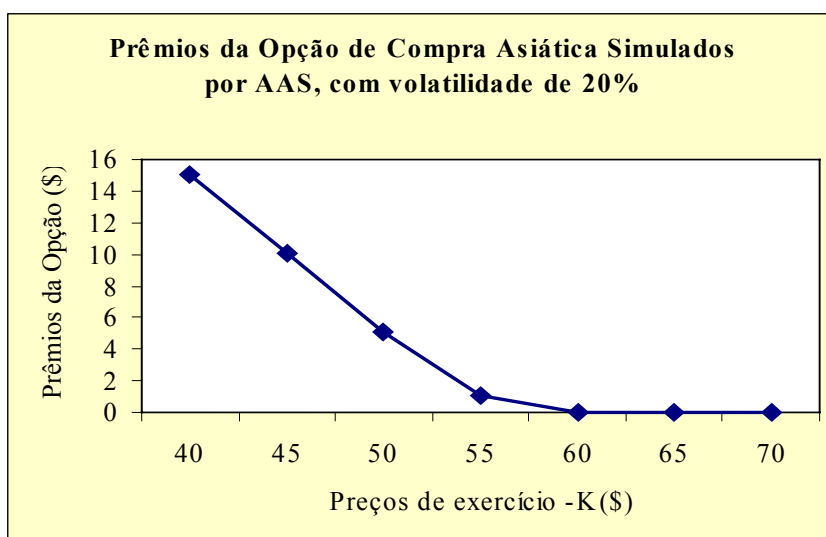
A tabela 3.1 apresenta os resultados analíticos do modelo de *Black e Scholes* (1973) para as opções de compra consideradas. Pode-se notar que, para uma determinada volatilidade, os prêmios tendem a zero à medida em que a opção fica fora do dinheiro, como era esperado, e que, quando consideramos um determinado preço de exercício, o prêmio para a opção de compra asiática aumenta com o aumento da volatilidade, para valores de preço de exercício muito próximos ou acima do preço inicial do ativo (no caso, $K > \$50$).

Tabela 3.1 – Prêmios de opções de compra do tipo asiáticas calculados segundo o modelo de Black & Scholes. Foram consideradas 21 opções asiáticas, diferenciadas pelos valores dos parâmetros Preço de Exercício (K) e volatilidade (σ). Os preços do ativo-objeto foram simulados até a data de vencimento das opções, num total de 42 dias úteis, partindo-se de um preço inicial hipotético de \$ 55. A taxa de juros livre de risco admitida foi de 3% a.a.

Black & Scholes	Prêmios Opção de Compra Asiática		
	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$
K 1 = 40	15.0317	14.9936	14.9408
K 2 = 45	10.0566	10.0208	9.9928
K 3 = 50	5.0992	5.1891	5.3879
K 4 = 55	1.0839	1.5779	2.0632
K 5 = 60	0.038	0.2204	0.5198
K 6 = 65	0.0002	0.0134	0.0859
K 7 = 70	0	0.0004	0.0097

Os prêmios simulados pelas técnicas de Amostragem Aleatória Simples, Variáveis Antitéticas, Variável de Controle, Hipercubo Latino, Amostragem Descritiva e Variável de Controle com Amostragem Descritiva e os respectivos erros quadráticos calculados em relação aos prêmios do modelo de *Black e Scholes* (1973) estão apresentadas na tabela 3.2 (3.2a e 3.2b). Em todos os métodos, qualquer que seja a combinação de K e σ podemos observar a não-tendenciosidade das médias por meio do erro quadrático dos prêmios estimados, visto que eles estão bem próximos de zero. Ou seja, os prêmios estimados se aproximaram dos valores “verdadeiros” calculados pelo modelo de *Black e Scholes* e mostrados na tabela 3.1. Cabe aqui lembrar que, exceção feita aos dois primeiros métodos (Amostragem Aleatória Simples e Variáveis Antitéticas) esse erro quadrático embute um viés, dado pelo fato de estar se comparando prêmios aritméticos estimados com a solução analítica de *Black e Scholes* (1973), que representa apenas uma aproximação para o prêmio justo no caso aritmético.

Gráfico 3.1 – Prêmios estimados para uma opção de compra asiática, simulado pelo método da Amostragem Aleatória Simples (AAS), para uma volatilidade de 20%, em função de vários preços de exercício (K= \$40; \$45; \$50; \$55; \$60; \$65 e \$70). Os preços do ativo-objeto foram simulados até a data de vencimento da opção, num total de 42 dias úteis, partindo de um preço inicial hipotético de \$55. A taxa de juros livre de risco admitida foi de 3% a.a.



Os resultados obtidos para os prêmios estimados corroboram a expectativa lógica de que os prêmios da opção tendem a zero à medida em que a opção fica fora do dinheiro, conforme podemos observar na tabela 3.2. Quanto maiores os preços de exercício, menores os prêmios estimados, quando consideramos uma mesma volatilidade, conforme pode ser visto no gráfico 3.1, onde se exemplificou a volatilidade de 20% no método de Amostragem Aleatória Simples.

No entanto, ao se observar a sensibilidade dos prêmios estimados ao aumento da volatilidade, os resultados, em geral, não indicaram o esperado, isto é, um aumento no prêmio à medida em que a volatilidade aumenta, considerando o preço de exercício (K) constante (tabela 3.2). De qualquer forma, esse fato só foi observado para os menores valores de K (\$40 e \$45) e o sentido da sensibilidade dos prêmios em relação a aumentos da volatilidade foi o mesmo do que o observado no caso dos prêmios “verdadeiros”, obtidos por *Black e Scholes* (tabela 3.1).

Tabela 3.2a – Prêmios e Erros Quadráticos dos prêmios das opções de compra asiáticas em relação ao prêmio calculado pelo modelo de Black e Scholes apresentados na tabela 3.1, estimados por simulação, segundo os métodos Amostragem Aleatória Simples, Variáveis Antitéticas e Variável de Controle. Foram consideradas 21 opções asiáticas, diferenciadas pelos valores dos parâmetros: preço de exercício (K) e volatilidade (σ). Os preços do ativo-objeto foram simulados até a data de vencimento das opções, num total de 42 dias úteis, partindo-se de um preço inicial hipotético de \$ 55. A taxa de juros livre de risco admitida foi de 3% a.a.

Amostragem Aleatória Simples (AAS)	Prêmios Opções de Compra Asiáticas			Erros Quadráticos		
	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$
K 1 = 40	15.0283	14.9881	14.933	0.00001	0.00003	0.00006
K 2 = 45	10.0532	10.0155	9.9852	0.00001	0.00003	0.00006
K 3 = 50	5.0959	5.1832	5.3769	0.00001	0.00003	0.00012
K 4 = 55	1.0774	1.5684	2.0511	0.00004	0.00009	0.00015
K 5 = 60	0.0367	0.2154	0.5124	0.00000	0.00003	0.00005
K 6 = 65	0.0002	0.0124	0.0834	0.00000	0.00000	0.00001
K 7 = 70	0	0.0004	0.0094	0.00000	0.00000	0.00000
Variáveis Antitéticas	Prêmios Opções de Compra Asiáticas			Erros Quadráticos		
	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$
K 1 = 40	15.0304	14.9907	14.9357	0.00000	0.00001	0.00003
K 2 = 45	10.0553	10.0179	9.985	0.00000	0.00001	0.00006
K 3 = 50	5.0961	5.1784	5.3718	0.00001	0.00011	0.00026
K 4 = 55	1.0749	1.5644	2.0456	0.00008	0.00018	0.00031
K 5 = 60	0.0341	0.2096	0.5043	0.00002	0.00012	0.00024
K 6 = 65	0.0002	0.0123	0.0777	0.00000	0.00000	0.00007
K 7 = 70	0	0.0005	0.0093	0.00000	0.00000	0.00000
Variável de Controle	Prêmios Opções de Compra Asiáticas			Erros Quadráticos		
	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$
K 1 = 40	15.0629	15.0638	15.0652	0.00097	0.00493	0.01548
K 2 = 45	10.0879	10.0903	10.1119	0.00098	0.00483	0.01419
K 3 = 50	5.1288	5.2480	5.4837	0.00088	0.00347	0.00917
K 4 = 55	1.1008	1.6151	2.1288	0.00029	0.00138	0.00431
K 5 = 60	0.0413	0.2362	0.5573	0.00001	0.00025	0.00140
K 6 = 65	0.0002	0.0161	0.1000	0.00000	0.00001	0.00020
K 7 = 70	0.0000	0.0006	0.0126	0.00000	0.00000	0.00001

Tabela 3.2b – Prêmios e Erros Quadráticos dos prêmios das opções de compra asiáticas em relação ao prêmio calculado pelo modelo de Black & Scholes apresentados na tabela 3.1, estimados por simulação, segundo os métodos Hipercubo Latino, Amostragem Descritiva e Variável de Controle com Amostragem Descritiva. Foram consideradas 21 opções asiáticas, diferenciadas pelos valores dos parâmetros Preço de Exercício (K) e volatilidade (σ). Os preços do ativo-objeto foram simulados até a data de vencimento das opções, num total de 42 dias úteis, partindo-se de um preço inicial hipotético de \$ 55. A taxa de juros livre de risco admitida foi de 3% a.a.

Hipercubo Latino	Prêmios Opções Asiáticas			Erros Quadráticos		
	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$
K 1 = 40	15.0619	15.0614	15.061	0.00091	0.00460	0.01445
K 2 = 45	10.0868	10.0878	10.1058	0.00091	0.00449	0.01277
K 3 = 50	5.1263	5.2384	5.4682	0.00073	0.00243	0.00645
K 4 = 55	1.0919	1.6018	2.1115	0.00006	0.00057	0.00233
K 5 = 60	0.0385	0.2298	0.5478	0.00000	0.00009	0.00078
K 6 = 65	0.0002	0.0148	0.0941	0.00000	0.00000	0.00007
K 7 = 70	0.0000	0.0004	0.0116	0.00000	0.00000	0.00000
Amostragem Descritiva	Prêmios Opções Asiáticas			Erros Quadráticos		
	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$
K 1 = 40	15.0618	15.0612	15.0606	0.00091	0.00457	0.01435
K 2 = 45	10.0867	10.0877	10.1072	0.00091	0.00448	0.01309
K 3 = 50	5.1276	5.2441	5.4755	0.00081	0.00303	0.00767
K 4 = 55	1.0909	1.6002	2.1092	0.00005	0.00050	0.00212
K 5 = 60	0.0387	0.2259	0.5402	0.00000	0.00003	0.00042
K 6 = 65	0.0002	0.0149	0.0947	0.00000	0.00000	0.00008
K 7 = 70	0.0000	0.0005	0.012	0.00000	0.00000	0.00001
Variável de Controle com Amostragem Descritiva	Prêmios Opções Asiáticas			Erros Quadráticos		
	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$
K 1 = 40	15.0632	15.0642	15.0658	0.00099	0.00498	0.01561
K 2 = 45	10.0880	10.0907	10.1114	0.00098	0.00488	0.01407
K 3 = 50	5.1286	5.2479	5.4833	0.00086	0.00346	0.00911
K 4 = 55	1.1009	1.6154	2.1293	0.00029	0.00141	0.00437
K 5 = 60	0.0412	0.2363	0.5577	0.00001	0.00025	0.00144
K 6 = 65	0.0003	0.0161	0.1002	0.00000	0.00001	0.00020
K 7 = 70	0.0000	0.0006	0.0129	0.00000	0.00000	0.00001

3.2 – Avaliação do ganho de precisão das técnicas em relação ao método padrão

O erro-padrão dos prêmios simulados pelas diferentes técnicas amostrais é apresentado na tabela 3.3³. Pode-se verificar que o uso do método Variável de Controle resultou em estimativas com menor variabilidade.

Entretanto, quando foi testada a combinação da técnica de Variável de Controle com Amostragem Descritiva, o erro-padrão dos prêmios estimados foi ainda menor, na maioria dos casos, do que os estimados pela Variável de Controle.

Tabela 3.3 – Valores do erro-padrão dos prêmios de opções de compra asiáticas estimados por simulação segundo os métodos Amostragem Aleatória Simples (AAS), Variáveis Antitéticas, Variável de Controle, Hipercubo Latino, Amostragem Descritiva e Variável de Controle combinada com Amostragem Descritiva. Foram consideradas 21 opções asiáticas, diferenciadas pelos valores dos parâmetros preço de exercício (K) e volatilidade (σ). Os preços do ativo-objeto foram simulados até a data de vencimento das opções, num total de 42 dias úteis, partindo-se de um preço inicial hipotético de \$ 55. A taxa de juros livre de risco admitida foi de 3% a.a.

Erro-padrão dos prêmios das opções de compra asiáticas						
	AAS			Variáveis Antitéticas		
	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$
K 1 = 40	0.075	0.1118	0.148	0.004	0.0089	0.0157
K 2 = 45	0.075	0.111	0.1437	0.004	0.0093	0.021
K 3 = 50	0.0721	0.1001	0.1228	0.0075	0.0264	0.0524
K 4 = 55	0.0401	0.0599	0.08	0.0399	0.0613	0.0835
K 5 = 60	0.0074	0.0225	0.0404	0.0073	0.0257	0.0492
K 6 = 65	0.0006	0.0058	0.0168	0.0005	0.0054	0.0165
K 7 = 70	0	0.0011	0.0057	0	0.001	0.0062
	Variável de Controle *			Hipercubo Latino		
	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$
K 1 = 40	0.0008	0.0018	0.0032	0.0065	0.0107	0.0161
K 2 = 45	0.0008	0.0017	0.0028	0.0065	0.0108	0.0189
K 3 = 50	0.0007	0.0012	0.0021	0.0081	0.0222	0.0413
K 4 = 55	0.0006	0.0013	0.0022	0.0271	0.0414	0.0563
K 5 = 60	0.0004	0.0012	0.0021	0.0068	0.0189	0.0334
K 6 = 65	0.0001	0.0006	0.0018	0.0004	0.006	0.0159
K 7 = 70	-	0.0002	0.0009	0	0.0009	0.0067
	Amostragem Descritiva			Variável de Controle com Amostragem Descritiva*		
	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$
K 1 = 40	0.0032	0.0073	0.0129	0.0007	0.0015	0.0030
K 2 = 45	0.0032	0.0078	0.0174	0.0007	0.0020	0.0036
K 3 = 50	0.0069	0.0228	0.041	0.0009	0.0016	0.0026
K 4 = 55	0.0259	0.04	0.0549	0.0005	0.0012	0.0021
K 5 = 60	0.0067	0.0192	0.0333	0.0003	0.0008	0.0019
K 6 = 65	0.0005	0.0054	0.0158	0.0001	0.0006	0.0012
K 7 = 70	0	0.0011	0.0059	0.0000	0.0002	0.0008

* Os dados referem-se ao erro padrão da regressão descrita na seção 2.

Para melhor avaliar o ganho de precisão com a utilização dos diversos métodos de simulação em relação ao método da Amostragem Aleatória Simples, comparou-se o erro-padrão obtido com cada um dos métodos, com o da Amostragem Simples, conforme apresentado na tabela 3.4. Quanto mais negativos os valores apresentados na tabela 3.4, maior o ganho de precisão do método em relação ao *Monte Carlo* tradicional. Constatou-se assim, um ganho de precisão em todos os métodos de simulação analisados, à exceção de algumas poucas combinações de K e σ nos métodos das Variáveis Antitéticas (4 casos), Hipercubo Latino (2 casos) e Amostragem Descritiva (1 caso). Em particular, os métodos Variável de Controle e Amostragem Descritiva apresentaram maiores ganhos de precisão em relação à Amostragem Aleatória Simples.

Tabela 3.4 - Variação percentual do erro-padrão dos prêmios de opções de compra asiáticas estimados por simulação segundo os métodos Amostragem Aleatória Simples (AAS), Variáveis Antitéticas, Variável de Controle, Hipercubo Latino, Amostragem Descritiva e Variável de Controle combinada com Amostragem Descritiva, em relação ao erro-padrão do prêmio estimado pelo método AAS. Foram consideradas 21 opções asiáticas, diferenciadas pelos valores dos parâmetros Preço de Exercício (K) e volatilidade (σ). Os preços do ativo-objeto foram simulados até a data de vencimento das opções, num total de 42 dias úteis, partindo-se de um preço inicial hipotético de \$ 55. A taxa de juros livre de risco admitida foi de 3% a.a.

Erro-padrão dos prêmios das opções de compra asiáticas						
	Variáveis Antitéticas			Variável de Controle *		
	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$
K 1 = 40	-94.7%	-92.0%	-89.4%	-99.0%	-98.4%	-97.9%
K 2 = 45	-94.7%	-91.6%	-85.4%	-98.9%	-98.5%	-98.1%
K 3 = 50	-89.6%	-73.6%	-57.3%	-99.1%	-98.8%	-98.3%
K 4 = 55	-0.5%	2.3%	4.4%	-98.6%	-97.9%	-97.2%
K 5 = 60	-1.4%	14.2%	21.8%	-94.2%	-94.7%	-94.7%
K 6 = 65	-16.7%	-6.9%	-1.8%	-87.3%	-89.3%	-89.0%
K 7 = 70	0.0%	-9.1%	8.8%	0.0%	-79.5%	-84.3%
	Hipercubo Latino			Amostragem Descritiva		
	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$
K 1 = 40	-91.3%	-90.4%	-89.1%	-95.7%	-93.5%	-91.3%
K 2 = 45	-91.3%	-90.3%	-86.8%	-95.7%	-93.0%	-87.9%
K 3 = 50	-88.8%	-77.8%	-66.4%	-90.4%	-77.2%	-66.6%
K 4 = 55	-32.4%	-30.9%	-29.6%	-35.4%	-33.2%	-31.4%
K 5 = 60	-8.1%	-16.0%	-17.3%	-9.5%	-14.7%	-17.6%
K 6 = 65	-33.3%	3.4%	-5.4%	-16.7%	-6.9%	-6.0%
K 7 = 70	0.0%	-18.2%	17.5%	0.0%	0.0%	3.5%
	Variável de Controle com Amostragem Descritiva*					
	$\sigma 1 = 20\%$	$\sigma 2 = 30\%$	$\sigma 3 = 40\%$			
K 1 = 40	-99.1%	-98.6%	-98.0%			
K 2 = 45	-99.1%	-98.2%	-97.5%			
K 3 = 50	-98.7%	-98.4%	-97.9%			
K 4 = 55	-98.7%	-98.0%	-97.3%			
K 5 = 60	-96.1%	-96.3%	-95.2%			
K 6 = 65	-87.3%	-89.6%	-92.9%			
K 7 = 70	-	-83.0%	-86.8%			

Entretanto, quando associamos a Variável de Controle com a Amostragem Descritiva, observamos um aumento na precisão dos prêmios estimados da opção, que se apresentou superior em mais de 75% das situações quando comparado com o uso isolado da Variável de Controle.

Por fim, os tempos de processamento foram relativamente próximos, variando entre 10 e 20 segundos, para cada experimento, composto de 40 corridas com 1000 trajetórias de 42 dias cada uma. Ademais, mesmo tendo todas as simulações sido realizadas com *Software MatLab 6.1* em um mesmo equipamento⁴, os autores admitem que melhores tempos de processamento poderiam ser encontrados caso as simulações fossem executadas em

equipamentos mais velozes ou os *scripts* gerados pudessem ser otimizados com outros recursos disponíveis no software MatLab.

4 - Conclusões

A opção asiática é um tipo de opção exótica, cujo preço final depende da média da trajetória dos preços do ativo ao longo da vida da opção. Ela tem sido avaliada por meio da simulação de *Monte Carlo*, que tradicionalmente utiliza o método de Amostragem Aleatória Simples. Entretanto, diversas técnicas de redução de variância têm sido usadas para otimizar este procedimento.

Este artigo teve como objetivo comparar o prêmio de opções de compra asiáticas obtido pela solução analítica proposta por *Black & Scholes* (1973), com os prêmios estimados por simulação de *Monte Carlo*, utilizando diversas técnicas redutoras de variância. Para isto, foram utilizadas os seguintes métodos: Amostragem Aleatória Simples, Variáveis Antitéticas, Variável de Controle, Hipercubo Latino e Amostragem Descritiva. No decorrer da pesquisa, julgou-se relevante avaliar a combinação da Variável de Controle com a Amostragem Descritiva. Também, procurou-se avaliar o ganho de precisão das estimativas de prêmio obtidas com as diferentes técnicas redutoras de variância testadas.

Os resultados obtidos confirmaram a não-tendenciosidade das estimativas geradas por simulação, pois, em todos os casos, os prêmios se aproximaram dos valores da solução analítica (“verdadeiros”) obtidos pelo modelo de *Black e Scholes* (1973). Além disso, os prêmios simulados corroboraram com a expectativa de que eles tenderiam a zero à medida em que a opção de compra fique fora do dinheiro.

Sob o ponto de vista do ganho de precisão dos métodos de redução de variância, todos eles foram superiores ao método tradicional de *Monte Carlo*. Porém, um novo e importante resultado encontrado foi que a utilização do método de Variável de Controle combinado com Amostragem Descritiva proporcionou o maior ganho de precisão. Os autores entendem que novas formas de associação entre as técnicas de redução de variância devam ser testadas para opções asiáticas e, em especial, quando combinadas com a Amostragem Descritiva, uma vez que essa combinação proporcionou aqui melhores resultados. Também seria interessante estender este estudo para outros tipos de opções exóticas, como por exemplo, opções com barreira.

Referências Bibliográficas

- ARAÚJO, M. **Simulação de Monte Carlo para Cálculo do Var: o Uso da Amostragem Descritiva**. 2001. 120p. Dissertação (Mestrado) - Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- BLACK, F. & SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, 81 (3): 637-59, May 1973.
- BOYLE, P.P. Options: A Monte Carlo approach. **Journal of Financial Economics**, v.4, p.323-338, 1977.
- BROADIE M. & GLASSERMAN P. Estimating Security Price Derivatives Using Simulation. **Management Science**, 42 (2): 268-285, 1996.
- CHARNES J. M.. Using Simulation for Option Pricing. **In Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference**, ed. J. A. Joines, R. R. Barton, K. Kang, and P. A. Fishwick, 2000.
- Hansen , A.T.; Jorgensen, P.L. Analytical Valuation of American-style Asian Options. Working Paper Series id=87888, November, 1997. www.ssrn.com acessado em 18 de abril de

2003.

- HULL, J. C. **Options, Futures and Other Derivatives**. Prentice Hall. Fourth Edition, 1999.
- MILEVSKY, M.; POSNER, S. ASIAN OPTIONS, The Sum of Lognormals and the Reciprocal Gamma Distribution. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, September 1998.
- NEAVE, H.; YE, G. Pricing Asian Options using path bundling. **Social Science Research Network Electronic Paper Collection**: <http://papers.ssrn.com/abstract=284888>, 2000.
- PACHECO, F. **Estudo Comparativo dos Métodos de Quasi-Monte Carlo, Amostragem Descritiva, Hipercubo Latino e Monte Carlo Clássico na Análise de Risco**. 2001. 155p. Dissertação (Mestrado em Administração) - Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- SALIBY, E. Descriptive Sampling: An Improvement Over Latin Hypercube Sampling. In: **Proceedings of the 1997 Winter Simulation Conference**, ed. S. Andradóttir, K.J. Healy, D.H. Withers and B.L. Nelson, 1997.
- _____. **Repensando a Simulação: A Amostragem Descritiva**. Ed. Atlas, 1989.
- _____. Descriptive Sampling: A Better Approach to Monte Carlo Simulation. **Journal of the Operational Research Society**, Vol. 41, nº 12, 1133-1142, 1990.
- SALIBY, E.; PACHECO, F. An Empirical Evaluation of Sampling Methods in Risk Analysis Simulation: Quasi-Monte Carlo, Descriptive Sampling and Latin Hypercube Sampling. In: **PROCEEDINGS OF THE 2002 WINTER SIMULATION CONFERENCE**, **Anais...** ed. E. Yucesan, C-H Chen, J.L. Snowdon and J.M. Charnes, Florida, 2002.
- WEICHERT, M. A.; LEMGRUBER, E. F. Opções com Barreira: O Mercado é Capaz de Avaliá-las Corretamente? In: **ENCONTRO ANUAL DA ANPAD**, 26., 2002, Salvador. **Anais Eletrônicos...** Salvador: ANPAD, 2002. 1 CD.

¹ A derivação da equação encontra-se em Hull (1999).

² Admitiu-se que o vencimento das opções se dá no 42º dia.

³ Nesta tabela, os dados referentes aos métodos Variável de Controle e Variável de Controle com Amostragem Descritiva correspondem ao erro-padrão da regressão feita conforme descrito na seção 2.

⁴ Microcomputador Pentium III 600 Mhz, 256 de memória RAM e HD de 7.200 RPM.