

Contornando os Pressupostos de Black & Scholes: Aplicação do Modelo de Precificação de Opções de Duan no Mercado Brasileiro

Autoria: Gustavo Silva Araújo, Claudio Henrique da Silveira Barbedo, Antonio Carlos Figueiredo, Eduardo Facó Lemgruber

Resumo

O modelo de precificação de opções de Duan é uma alternativa ao modelo de Black & Scholes (B&S) que considera a heteroscedasticidade e a não normalidade dos retornos dos ativos. Este trabalho analisa o desempenho e as características desse modelo quando aplicado ao mercado brasileiro, especificamente em opções de compra da Telebrás no período julho de 1995 a junho de 2000. Para isso, comparam-se os preços dados pelo modelo com os de mercado e com os do modelo de B&S. Para a construção do modelo de Duan é selecionado, a cada semestre, um processo estocástico entre o GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e TARCH (1,1). São empregadas três estimativas diferentes de volatilidade no modelo: a implícita da equação de B&S, a histórica, e a GARCH. Os resultados sugerem que as diferenças entre os preços gerados pelo modelo e os de mercado são menores ao precificar opções dentro-do-dinheiro, quando o modelo utiliza em sua construção o processo EGARCH(1,1) e quando a volatilidade empregada é a implícita de B&S. O modelo super-precifica acentuadamente a maioria das opções quando utiliza, em sua construção, o GARCH (1,1) e sub-precifica as observações fora e no-dinheiro quando o processo EGARCH (1,1) é empregado. As opções dentro-do-dinheiro sempre são super-precificadas, independentemente do processo utilizado.

1. Introdução

O modelo de precificação de opções mais empregado pelos mercados financeiros é o de Black & Scholes (1973). A consagração deste modelo se deve principalmente à sua facilidade de aplicação e às suas pequenas diferenças em relação aos preços de mercado.

Porém, existem alguns vieses sistemáticos, já amplamente estudados, associados ao modelo de Black & Scholes (B&S), a saber, a sub-precificação de opções fora-do-dinheiro (Black, 1975; Gultekin et al, 1982), a sub-precificação de opções de ações com baixa volatilidade (Gultekin et al, 1982; Whaley, 1982) e a sub-precificação de opções com curto tempo para vencimento (Black, 1975; Whaley, 1982). Outra evidência já bem documentada é o sorriso da volatilidade (*volatility smile/smirk*). Este termo se refere ao fato de se obter, simultaneamente, volatilidades implícitas distintas para diferentes opções da mesma ação, o que é constatado com o formato convexo do gráfico da curva de volatilidade implícita em relação ao preço de exercício (Rubinstein, 1985; Sheikh, 1991; Derman e Kani, 1994; Duan, 1996). Existe, ainda, o fato de volatilidades implícitas da mesma ação, colhidas ao mesmo tempo de opções com o mesmo preço de exercício, serem diferentes para vencimentos distintos (Black, 1975; Whaley, 1982; Heynen *et al*, 1994).

Entre as premissas do modelo de B&S, tem-se que os retornos dos ativos-objeto são normalmente distribuídos e que a volatilidade dos retornos é constante ao longo do tempo. Porém, como já largamente documentado pela literatura, os retornos das ações possuem propriedades como as caudas largas, assimetria e variância mutável ao longo do tempo (Black, 1976). No mercado brasileiro, Adler *et al*. (1999) e Lanari (2000) também constataam que a premissa de volatilidade constante do preço das ações não é verificada.

A primeira tentativa bem sucedida de se modelar econometricamente essas propriedades foi feita por Engle (1982) ao introduzir os processos ARCH.ⁱ Bollerslev (1986) estende o método ao desenvolver o processo GARCH.^{ii, iii}

Desde o início da década de 90, os processos ARCH/GARCH vêm sendo utilizados para examinar preços de opções (Engle e Mustafa, 1992; Day e Lewis, 1992; Noh, Engle e Kane, 1994; Engle e Rosenberg, 1995). Porém, o arcabouço teórico para o modelo de precificação de opções de Duan, ou modelo de precificação de opções GARCH, somente foi desenvolvido por Duan (1995), ao introduzir o conceito *locally risk-neutral valuation relationship* (LRNVR). Assim sendo, o modelo de Duan, ao contrário do de B&S, é um modelo de precificação de opções que leva em conta a heteroscedasticidade dos retornos dos ativos e a não normalidade de suas distribuições.

O presente trabalho é o primeiro exame aprofundado do modelo de Duan no mercado brasileiro de opções. Procura-se verificar como o modelo se comporta no mercado brasileiro, especificamente em opções de compra da Telebrás, ao confrontar os preços encontrados ao se empregar o modelo com os de mercado e comparando-os com os do modelo de B&S. Na construção do modelo de Duan, foi selecionado, entre os processos GARCH (1,1), TARCH (1,1) e o EGARCH (1,1), o que mais se ajustava a cada semestre estudado. Para ambos modelos, as observações de opções são precificadas utilizando a volatilidade histórica, a volatilidade implícita dada pelo modelo de B&S do dia útil imediatamente anterior^{iv} e a volatilidade estimada por um processo GARCH.

Existem algumas características que são particulares a esse trabalho em relação a outros que tratam do modelo de Duan: a cada dia útil, os parâmetros do processo GARCH utilizados na construção do modelo eram re-estimados (ou seja, o modelo de Duan é diferente para cada dia útil); uma das volatilidades utilizada como parâmetro de entrada do modelo é a volatilidade implícita obtida a partir do mesmo contrato de opção do dia útil anterior; outra volatilidade utilizada, a estimada por um processo GARCH, também teve seus parâmetros re-estimados diariamente; e, além da verificação das diferenças em relação ao mercado em vários períodos diferentes e com relação à proximidade do dinheiro, há também a investigação acerca da sub e super-precificação das opções.

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma: na próxima seção são realizadas uma sucinta revisão do modelo de Duan e uma breve comparação com o modelo de B&S; na terceira seção é descrita a metodologia do trabalho; a quarta seção cobre a amostra e os testes empregados; os resultados obtidos são apresentados na quinta seção; e a sexta e última seção apresenta as conclusões e algumas sugestões para investigações adicionais.

2. Revisão Bibliográfica

2.1 O Modelo de Duan

O fundamento teórico do modelo de Duan foi desenvolvido em 1995, quando o autor estende o conceito de neutralidade a risco de Rubinstein (1976) e Brennan (1979). Devido à complexidade dos processos GARCH, uma versão generalizada de neutralidade a risco foi desenvolvida: o conceito *Locally Risk-Neutral Valuation Relationship* (LRNVR). No LRNVR, a variância é constante para apenas um período à frente. Assim, diferentemente do modelo de B&S, o modelo de Duan leva em consideração o fator prêmio de risco característico do ativo-objeto.

As premissas pertinentes ao modelo são as seguintes:

- (a) O preço do ativo-objeto segue o movimento browniano geométrico;
- (b) A volatilidade dos retornos do ativo-objeto segue um modelo GARCH; e
- (c) Para um período à frente, a volatilidade dos retornos do ativo-objeto é constante.

Se o preço de um ativo-objeto (S), como por exemplo uma ação, segue o movimento browniano geométrico, tem-se que $d \ln S = (\mu - 0,5\sigma^2)dt + \varepsilon$, onde μ é o retorno logarítmico esperado do ativo, σ^2 a volatilidade condicional no instante t , e ε é uma variável aleatória que possui uma distribuição normal com média zero e variância condicional σ^2 .^v Então, como μ , sob condições de log-normalidade, é igual a $\exp(r + \lambda c)$, onde λ é a unidade de prêmio de risco, e r é o retorno logarítmico do ativo livre de risco, ambos para um período, tem-se que o preço do ativo objeto para um período segue o seguinte processo:

$$S_t = S_{t-1} \exp[r_t + \lambda_t \sigma_t - 0,5\sigma_t^2 + \varepsilon_t] \quad (1)$$

É assumido que σ_t^2 , a variância condicional de ε_t , segue um processo GARCH, como por exemplo o GARCH (1,1) simétrico de Bollerslev (1986). A dinâmica ε_t é governada pela lei de probabilidade P com respeito a Φ_{t-1} , o conjunto de todas as informações até o período t . Assim,

$$\varepsilon_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2), \text{ sob a medida } P; \text{ e}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (2)$$

Pode-se utilizar, neste modelo, quaisquer especificações para a variância, tais como o EGARCH (Nelson, 1991), o TARCH (Glosten et al., 1993) ou o NGARCH (Engle e Ng, 1993)^{vi}, desde que os retornos do ativo sigam o processo especificado.^{vii}

No modelo de Duan existe apenas uma fonte de aleatoriedade, o ε_t , que faz parte da fórmula do preço do ativo-objeto - equação (1). A volatilidade do retorno para um período à frente é conhecida, dado o conjunto de informações Φ . Duan (1995) define uma medida de preço Q absolutamente contínua com respeito a P , e sob a qual um mais o retorno condicional esperado do ativo-objeto é igual a $\exp(r)$ ao invés de $\exp(r + \lambda \sigma)$, como era sob a medida P ; a variância condicional para um período à frente, contudo, é a mesma para ambas as medidas, uma vez que ela já era conhecida. Portanto, como a média condicional de um mais o retorno condicional esperado é independente de qualquer parâmetro relativo à preferência do investidor, a medida Q é dita satisfazer uma *locally risk-neutral valuation relationship* (LRNVR). Porém, a medida Q não satisfaz a neutralidade a risco global uma vez que a variância não é conhecida para todo o período. Se a variância for constante, a LRNVR se reduz ao convencional *risk-neutral valuation relationship*. Portanto, o LRNVR é uma versão generalizada de neutralidade a risco.

Assim sendo, uma medida de preço em equilíbrio Q satisfaz o conceito locally risk-neutral valuation relationship (LRNVR) se, para qualquer valor do ativo-objeto, S_t , as seguintes condições são satisfeitas:

← Q é mutuamente e absolutamente contínua com respeito a P ;

← $\frac{S_{t+1}}{S_t}$ é log-normalmente distribuído sob Q ;

← $E^Q(\frac{S_{t+1}}{S_t} | \phi_t) = \exp(r_{t+1})$; e

← $\text{Var}^Q(\ln(\frac{S_{t+1}}{S_t}) | \phi_t) = \text{Var}^P(\ln(\frac{S_{t+1}}{S_t}) | \phi_t)$.

Como a medida Q satisfaz o LRNVR, o prêmio de risco λ não deve estar presente na equação que modela o preço do ativo-objeto. Para isso, substitui-se a variável aleatória ε_t nas equações 1 e 2 por $\xi_t - \lambda \sigma$. Desta forma, sob a medida de preço Q , tem-se que:

$$S_t = S_{t-1} \exp[r_t - 0,5\sigma_t^2 + \xi_t] \quad (3),$$

$$\text{onde } \xi_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2), \quad \sigma_t^2 = \omega + \alpha(\xi_{t-1} - \lambda_t \sigma_{t-1})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (4).$$

O modelo de variância condicional obtido é o modelo GARCH assimétrico não-linear de Engle e Ng (1993) - NGARCH. Portanto, opções de um ativo que segue o tradicional GARCH, simétrico e linear, podem ser avaliadas como se o ativo seguisse um modelo GARCH assimétrico não-linear com a unidade de prêmio de risco, λ , sendo o parâmetro de alavancagem. Se $\lambda > 0$, a variância condicional é correlacionada negativamente com o retorno anterior do ativo-objeto, ou seja, o impacto na variância de “surpresas” negativas no retorno é maior que o de “surpresas” positivas. Esse efeito assimétrico na volatilidade também é denominado na literatura de “efeito alavancagem”.

É importante observar que o LRNVR não elimina a unidade de prêmio de risco. Ela afeta a inovação na variância condicional sob Q, a qual, por sua vez, afeta o preço do ativo-objeto.

Como o modelo de Duan não possui um algoritmo fechado para o cálculo do preço das opções européias, como o modelo de B&S, ele utiliza a simulação de Monte Carlo, método que vem sendo cada vez mais empregado em finanças devido à grande diminuição dos custos computacionais.

O valor da opção de compra (C_t) na data t , com preço de exercício K , é obtido ao se descontar, à taxa livre de risco, o valor esperado do pagamento final sob a medida Q:

$$C_t = \exp(-r(T - t))E^Q [\max(S_T - K, 0) | \mathcal{F}_t],$$

onde T é o prazo de vencimento da opção.

O valor da opção de venda européia (P_t) na data t pode ser calculado utilizando-se a relação de paridade entre as opções de compra e as opções de venda.

Os parâmetros de GARCH podem ser estimados não só a partir de preços à vista dos ativos-objeto, como também a partir dos preços das opções,^{viii} através do emprego de técnicas econométricas como a máxima verossimilhança e o princípio dos mínimos quadrados.

2.2 Modelo de Duan X Modelo de Black&Scholes

Sob a premissa da homoscedasticidade dos retornos de um ativo-objeto, na qual o modelo de B&S se baseia, quando o que governa realmente os processos é a heteroscedasticidade, a neutralidade a risco deve ser global (e não local) a fim de se manter a consistência do modelo.

Assim, o processo homoscedástico utilizado pelo modelo de Black & Scholes (B&S) é um caso especial do modelo de Duan que parte da premissa que a variância é constante até o vencimento da opção. Neste caso, uma medida de variância a ser utilizada na fórmula de B&S, a fim de se comparar os dois modelos, seria a variância estacionária (incondicional) de GARCH sob a medida P, igual a $\sigma^2 = \omega / (1 - \alpha - \beta)$, uma vez que esta medida de volatilidade pode ser definida como a variância média de longo prazo.^{ix, x} Essa variância não possui correlação com os retornos passados. A distribuição dos preços do ativo-objeto é log-normal e não depende do caminho da variância, apenas da variância média.

No modelo de Duan, a variância dos retornos do ativo-objeto para o período imediatamente posterior é conhecida sob as informações correntes, e, conseqüentemente, a distribuição dos retornos do ativo-objeto é log-normal para um período à frente. Além desse período, as variâncias são estocásticas e dependem de qual processo GARCH foi assumido. Assim sendo, a distribuição da variância condicional de um período futuro não é log-normal e a distribuição do preço final do ativo-objeto provavelmente não é log-normal, dado o caminho da variância condicional para um período.

Se a unidade de prêmio de risco, λ , for pequena e a distribuição condicional do preço final do ativo-objeto puder ser considerada log-normal (i.e., os parâmetros de GARCH α e β forem pequenos), o preço dado pelo modelo de Duan é aproximadamente o preço encontrado pelo modelo de B&S.

3. Metodologia

Os parâmetros necessários ao cálculo do preço de uma opção pelo modelo de Duan são os parâmetros de GARCH e da média condicional, a cotação da ação do dia do pregão^{xi}, a taxa de juro prefixada da data do pregão até a data do vencimento da opção, o tempo para o vencimento da opção e a volatilidade da ação.

Para cada semestre estudado, foi escolhido o processo GARCH mais adequado entre os processos GARCH (1,1), TARCH (1,1) e o EGARCH (1,1). Os dois últimos tornam possível modelar o efeito alavancagem no cálculo da volatilidade. A estimação dos parâmetros de GARCH e da média condicional foi realizada utilizando o programa EvIEWS 4.0, que emprega o método de máxima verossimilhança para resíduos normais. As equações dos processos GARCH são descritas a seguir:

$$\text{GARCH (1,1): } \sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2,$$

onde ω , α e β devem ser maiores que zero e $\alpha + \beta < 1$;

$$\text{TARCH (1,1): } \sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma d_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2,$$

onde $d_t = 1$ se $\varepsilon_t < 0$; e

$$\text{EGARCH (1,1): } \ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

Para todos os processos acima, a média condicional dos retornos é, com base na equação (1), igual a $r_t + \lambda_t \sigma_t - 0,5 \sigma_t^2$.

A escolha do processo GARCH que melhor se enquadra em cada semestre foi feita com base nos p-valores da estimativa de cada parâmetro e nos critérios Schwartz (1978) e Akaike (1970).^{xii} Além disso, os processos selecionados deveriam ser estacionários. O processo EGARCH (1,1) foi o escolhido em seis dos dez semestres: 95.2, 96.2, 98.1, 98.2, 99.1 e 99.2 e o GARCH (1,1) foi o processo escolhido nos restantes.

Os parâmetros de GARCH, λ e r foram estimados para cada dia útil sempre com base nos retornos logarítmicos de uma janela móvel de um ano. Assim sendo, o modelo de Duan é diferente para cada dia útil. A estimação dia-a-dia também foi realizada no programa EvIEWS 4.0.

As taxas de juro prefixadas para todos os prazos de vencimentos das opções foram extraídas dos contratos de futuros de DI-1dia negociados na BM&F. O método de interpolação empregado é o *flat forward*.^{xiii}

A partir da série de preços de fechamento da Telebrás ajustada para dividendos, derivam-se as séries de retornos diários, calculados pela forma logarítmica, $R_t = \ln(P_t/P_{t-1})$, onde R_t é o retorno relativo ao dia t e P_t representa a cotação de fechamento para o dia t . São utilizadas três estimativas para o parâmetro volatilidade: a histórica, a calculada por processos GARCH e a implícita, de acordo com o modelo de B&S, do dia útil imediatamente anterior da mesma opção que se está querendo precificar.^{xiv} A volatilidade histórica para cada dia útil é o desvio-padrão amostral da série de 21 retornos imediatamente anteriores a este dia,^{xv}

$$DP_{hist} = \left(\sum_{i=1}^{21} \frac{(R_i - \bar{R})^2}{20} \right)^{0,5}.$$

O processo GARCH escolhido para o cálculo da volatilidade para cada semestre foi o mesmo utilizado no modelo de Duan. Para a obtenção da volatilidade implícita de B&S, os parâmetros necessários foram obtidos diretamente de observações no mercado, a saber, o preço de fechamento do ativo-objeto^{xvi}, o tempo para o vencimento da opção, o preço de exercício da opção, a taxa de juro prefixada da data do pregão até a data do vencimento da opção e o preço de mercado da opção. As volatilidades implícitas foram calculadas por intermédio de processo iterativo. A volatilidade diária implícita equivalente foi calculada dividindo-se a anual pela raiz de 252.

O procedimento de precificação pelo modelo de Duan neste trabalho tem como base o mesmo procedimento adotado por Duan (1995). Desta forma, são utilizadas as fórmulas (3) e (4) e são realizadas 10.000 simulações de Monte Carlo para a precificação de cada observação de opção.

Para a precificação pelo modelo de B&S são utilizados os mesmos parâmetros empregados na obtenção da volatilidade implícita, exceto o preço de mercado. As volatilidades utilizadas são as mesmas que são empregadas no modelo de Duan.

4. Amostra e Testes

A amostra inicial consiste de séries de preços de fechamento de ações^{xvii} e opções de compra das empresas Telebrás cotadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA).^{xviii} Para o cálculo do valor das opções foi utilizado o preço da ação livre de ajustes. Para o cálculo dos retornos, os preços foram ajustados para dividendos.^{xix} Os dados referentes às opções foram coletados por meio de contato com a BOVESPA. Os preços de exercício das observações de opções fornecidos pela Bolsa já estavam ajustados para dividendos.

O estudo abrange o período de julho de 1995 a junho de 2000, o que totaliza 36 vencimentos de opções.^{xx} A escolha deste período se deve ao fato de ele englobar vários períodos de estabilidade e crise. Os preços de Telebrás de julho de 1994 a junho de 1995 também foram utilizados, uma vez que a janela para a determinação dos parâmetros da volatilidade GARCH é de um ano. A escolha da Telebrás foi realizada em virtude das opções de compra das ações desta Empresa possuírem as séries mais líquidas no período estudado.

Foram descartadas da amostra inicial as observações de opções que apresentavam dados incorretos e as em que o valor de mercado era menor que a diferença entre o preço da ação e o valor presente do preço de exercício, para se eliminar as possibilidades de arbitragem, de forma a reduzir o problema de assincronismo advindo do uso de preços de fechamento. Para a utilização da volatilidade implícita do dia útil imediatamente anterior, deveria haver negociação neste dia. Portanto, também foram descartadas da amostra as observações em que não houve negociação do mesmo contrato de opção no dia útil imediatamente anterior. Assim sendo, a amostra final contém 8.819 observações.

Se o baixo número de negócios fizesse com que a diferença entre os preços dados pelo modelo e os de mercado fosse significativamente maior, as observações de opções com baixa liquidez também seriam retiradas da amostra. Similarmente, se diferenças médias das observações com menores tempos para vencimento fossem significativamente maiores, elas seriam retiradas da amostra.

Para uma melhor análise dos resultados, a amostra foi dividida em 10 semestres e as observações de opções foram agrupadas de acordo com a razão entre o preço a vista da Telebrás e o valor presente do preço de exercício da opção (proximidade do dinheiro). Deste modo, elas foram classificadas como fora-do-dinheiro, quando esta relação era menor que 0,95, no-dinheiro, quando se situou entre 0,95 e 1,05 e dentro-do-dinheiro, quando era maior que 1,05.^{xxi} A Tabela 1 apresenta a quantidade de observações de opções em cada semestre, divididas de acordo com a proximidade do dinheiro.

Tabela 1 – Quantidade de Observações de Opções em Cada Semestre, Divididas de Acordo com a Proximidade do Dinheiro				
Semestre	Fora-do-dinheiro	No-Dinheiro	Dentro-do-Dinheiro	Total
95.2	251	156	186	593
96.1	239	213	259	711
96.2	512	294	304	1110
97.1	212	367	489	1068
97.2*	673	253	323	1249
98.1	409	198	267	874
98.2**	482	132	231	845
99.1***	337	160	239	736
99.2	390	224	285	899
00.1	440	148	146	734
* Período em que ocorreu a crise asiática				
** Período em que ocorreu a crise russa.				
*** Período em que ocorreu a desvalorização cambial brasileira.				

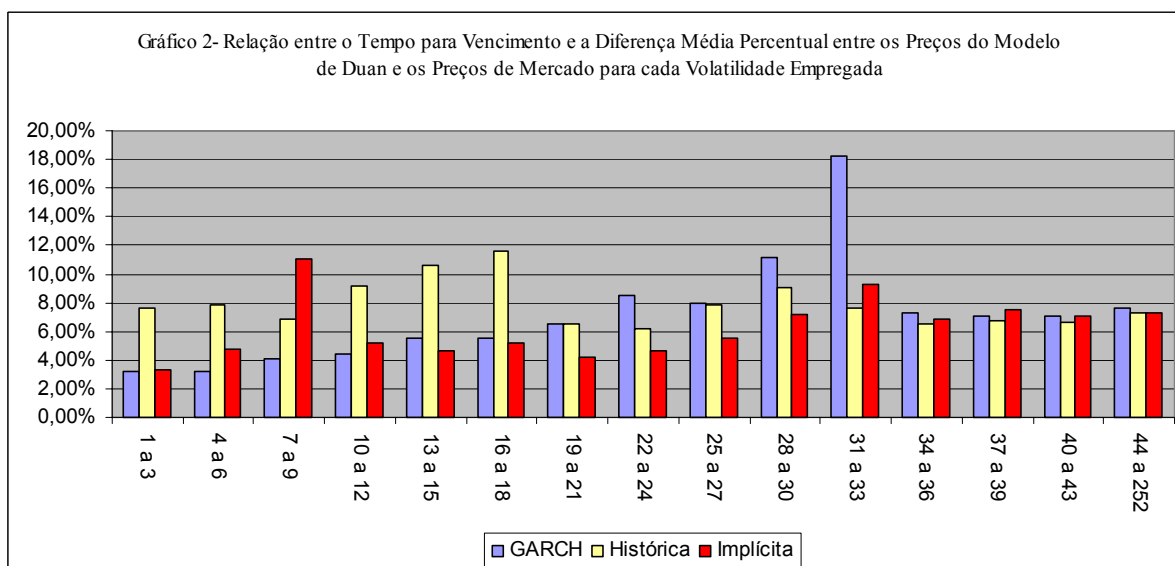
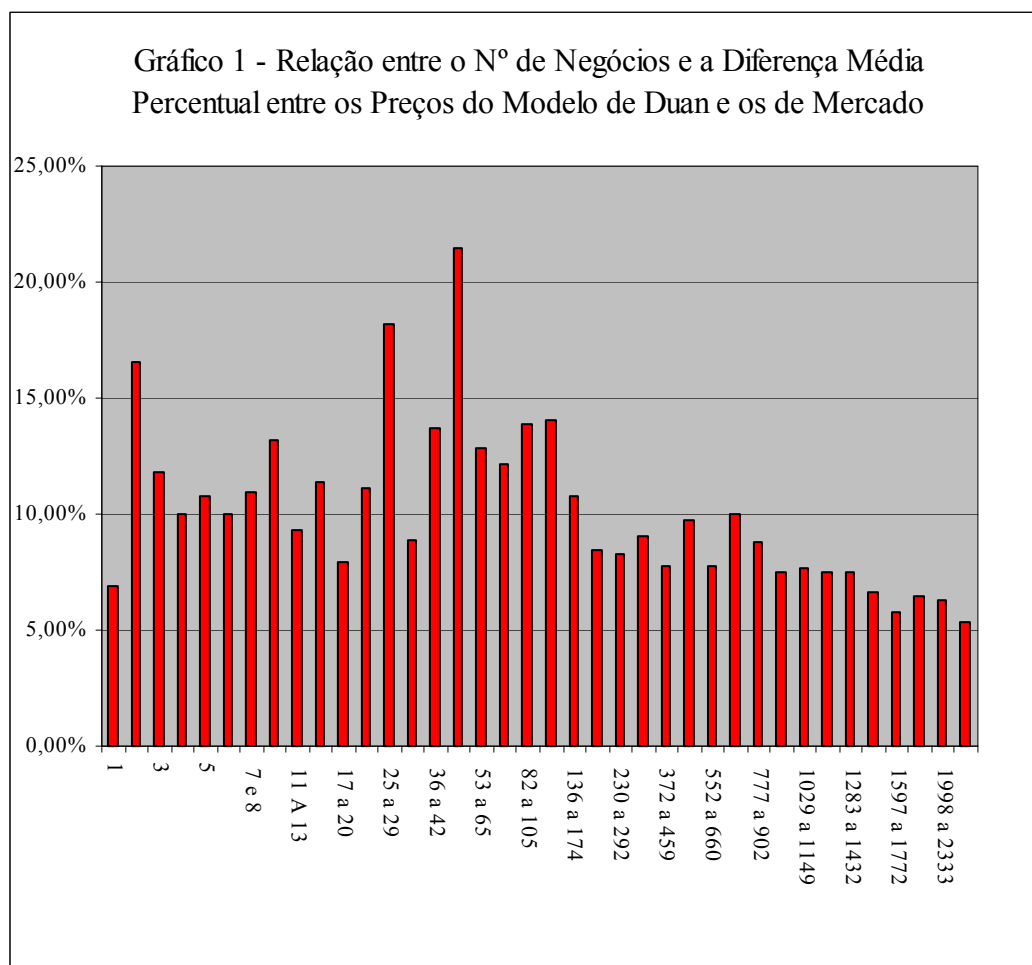
A diferença média entre o preço de mercado e o preço dado pelo modelo é dada por \sqrt{SQD} / n , onde SQD é soma dos quadrados das diferenças percentuais entre estes preços e n é o número de observações das opções. A diferença percentual em cada observação é dada por $(P_M - P_m)/P_m$, onde P_M é o preço da observação dado pelo modelo e P_m é o preço de mercado. Deve-se atentar para o fato de que a diferença percentual que se obtém para uma observação de opção sub-precificada pode ser no máximo, em valores absolutos, 100%, enquanto para as super-precificadas não há limite. Para opções de baixo valor, as fora-do-dinheiro, esse problema se torna crítico.

Para verificar se as diferenças percentuais do modelo utilizando cada volatilidade são significativamente distintas, foi realizado o teste t de diferença entre médias para amostras pareadas. A estatística do teste é dada por $\bar{D}\sqrt{n}/S_d$, onde \bar{D} é a média das subtrações das diferenças percentuais, S_d é o desvio padrão amostral dessas subtrações e n é o número de observações.

5. Resultados

É verificado se o número de negócios de cada observação influencia na diferença entre os preços de mercado e os preços dados pelo modelo de Duan. Para as três volatilidades utilizadas, a região de maiores diferenças se situa geralmente na faixa central de número de negociações (entre 30 e 230 negócios). Desta forma, como a baixa liquidez não significa maiores diferenças médias para todas as estimativas de volatilidade, não são desprezadas as observações de opções com menores números de negócios. O Gráfico 1 apresenta os resultados somente para a volatilidade implícita de B&S.^{xxii}

O Gráfico 2 mostra, para cada volatilidade empregada, a relação entre o tempo para vencimento e a diferença média percentual entre os preços de mercado e os dados pelos modelos de Duan. Como as diferenças médias para as observações com menores tempos de vencimento não são significativamente maiores para ambas os modelos, estas observações não foram descartadas.



A Tabela 2 apresenta as diferenças médias, para toda a amostra e para a amostra dividida em semestres, para as três volatilidades empregadas para o modelo de Duan. Para toda a amostra, o modelo apresenta a menor diferença média para a volatilidade implícita de B&S do dia útil anterior, seguido da volatilidade histórica e da volatilidade dada por um processo GARCH (pelo teste t esses valores são estatisticamente diferentes a um nível de significância de 1%). As três maiores diferenças médias entre o preço de mercado e o preço dado pelo modelo Duan ocorrem em semestres em que o processo GARCH utilizado na precificação de opções foi o GARCH (1,1) – os semestres 96.1, 97.2 e 00.1. Os semestres 97.2 e 99.1, períodos em que ocorreram graves crises (asiática e desvalorização cambial), são os únicos em que a diferença média do modelo com a volatilidade histórica é maior que a do modelo com as demais volatilidades, o que pode ser devido ao fato deste método de estimação captar mais lentamente as alterações na volatilidade dos retornos. Porém, o mesmo fato não é notado em 98.2 (semestre em que ocorreu a crise da Rússia). De uma maneira geral, os semestres de crise não proporcionam as maiores diferenças médias entre os preços do modelo e os preços de mercado.

Tabela 2 - Diferenças Médias entre o Preço de Mercado e o Preço dado pelo Modelo de Duan para Toda a Amostra e por Semestre, Considerando as Volatilidades Empregadas				
Período	Histórica	GARCH	Implícita de B&S	Processo GARCH utilizado no Modelo
Total	5,44%	5,52%	4,57%	
95.2	1,88%	2,18%	1,59%	EGARCH (1,1)
96.1	9,92%	13,99%	11,31%	GARCH (1,1)
96.2	4,14%	5,43%	4,40%	EGARCH (1,1)
97.1	3,86%	3,84%	3,83%	GARCH (1,1)
97.2	9,68%	5,85%	3,92%	GARCH (1,1)
98.1	3,31%	4,30%	3,33%	EGARCH (1,1)
98.2	2,16%	2,31%	2,32%	EGARCH (1,1)
99.1	5,33%	2,63%	2,38%	EGARCH (1,1)
99.2	2,29%	2,06%	2,29%	EGARCH (1,1)
00.1	11,29%	14,36%	11,98%	GARCH (1,1)

A Tabela 3 apresenta as diferenças médias entre o preço de mercado e o preço dado pelo modelo de Duan para cada semestre em relação à proximidade do dinheiro, considerando as três volatilidades empregadas. Mais uma vez é nítido que as diferenças são maiores para os semestres 96.1, 97.2 e o 00.1. O outro semestre em que o processo GARCH (1,1) é utilizado na construção do modelo, o 97.1, também apresenta grandes diferenças, principalmente para as observações fora e no-dinheiro.

Pode-se observar que, para todas volatilidades utilizadas, as diferenças são sempre menores para as observações de opções dentro-do-dinheiro, enquanto que são maiores para as fora-do-dinheiro. Para as observações no e dentro-do-dinheiro, a volatilidade histórica quase sempre apresenta as maiores diferenças médias. Para as observações no-dinheiro, a volatilidade implícita de B&S obtém as menores diferenças médias em quase todos os semestres. A Tabela 4 é semelhante à Tabela 3, exceto que se trata do modelo B&S. Ao se comparar as duas tabelas, há diferenças menores do Modelo Duan, em relação ao preço de mercado, apenas em alguns semestres, para as volatilidades Histórica e calculada por um processo GARCH e para observações fora-do-dinheiro.^{xxiii}

Tabela 3 - Diferenças Médias entre o Preço de Mercado e o Preço dado pelo Modelo de Duan por Semestre, Considerando as Volatilidades Empregadas e em Relação à Proximidade do Dinheiro									
Período	Fora-do-Dinheiro			No-Dinheiro			Dentro-do-Dinheiro		
	Histórica	GARCH	Implícita de B&S	Histórica	GARCH	Implícita de B&S	Histórica	GARCH	Implícita de B&S
95.2	4,06%	4,82%	3,32%	2,46%	2,58%	1,93%	1,29%	1,18%	1,72%
96.1	20,60%	39,34%	31,22%	17,00%	14,16%	11,74%	13,59%	4,73%	6,42%
96.2	7,36%	10,89%	8,71%	5,81%	7,03%	5,90%	6,59%	3,32%	3,18%
97.1	6,43%	13,28%	13,63%	7,37%	7,15%	6,89%	5,73%	2,90%	2,87%
97.2	17,14%	10,49%	6,75%	7,10%	6,42%	5,97%	9,80%	3,13%	3,07%
98.1	5,24%	8,52%	6,46%	8,70%	6,50%	5,50%	3,39%	2,11%	2,04%
98.2	2,97%	3,87%	3,90%	5,89%	3,42%	3,21%	3,57%	1,59%	1,54%
99.1	10,92%	4,71%	4,50%	6,25%	5,35%	4,31%	3,88%	2,90%	2,25%
99.2	4,13%	3,96%	4,61%	4,85%	3,77%	3,46%	2,39%	2,04%	2,26%
00.1	18,49%	23,77%	19,55%	7,39%	7,20%	9,16%	7,64%	5,32%	8,44%

Tabela 4 - Diferenças Médias entre o Preço de Mercado e o Preço dado pelo Modelo de B&S por Semestre, Considerando as Volatilidades Empregadas e em Relação à Proximidade do Dinheiro									
Período	Fora-do-Dinheiro			No-Dinheiro			Dentro-do-Dinheiro		
	Histórica	GARCH	Implícita de B&S	Histórica	GARCH	Implícita de B&S	Histórica	GARCH	Implícita de B&S
95.2	14,02%	14,02%	3,26%	4,88%	2,58%	1,17%	1,38%	1,18%	0,45%
96.1	7,90%	8,69%	2,16%	3,02%	14,16%	0,91%	0,69%	4,73%	0,30%
96.2	3,71%	3,61%	1,48%	1,82%	7,03%	0,65%	0,42%	3,32%	0,34%
97.1	2,59%	2,60%	2,08%	1,28%	7,15%	0,90%	0,30%	2,90%	0,25%
97.2	14,01%	14,95%	1,93%	3,13%	6,42%	1,19%	0,72%	3,13%	0,63%
98.1	37,37%	37,94%	2,59%	4,03%	6,50%	1,07%	1,10%	2,11%	0,78%
98.2	19,60%	19,60%	2,10%	2,61%	3,42%	1,28%	0,86%	1,59%	0,73%
99.1	4,64%	4,64%	1,96%	2,35%	5,35%	1,03%	0,63%	2,90%	0,55%
99.2	3,13%	3,12%	1,79%	1,79%	3,77%	0,80%	0,47%	2,04%	0,34%
00.1	3,20%	3,20%	2,98%	1,74%	7,20%	1,23%	0,80%	5,32%	0,86%

A Tabela 5 mostra as proporções de sub e super-precificação, em relação ao preço de mercado, do modelo de Duan, utilizando as três volatilidades empregadas, para toda a amostra. Os resultados são similares para qualquer volatilidade utilizada: o modelo de Duan obtém um preço maior que o preço de mercado em aproximadamente 60% das observações de opções.

Tabela 5 – Percentuais de Sub-precificação e Super-precificação do Modelo Duan para Toda a Amostra para cada Volatilidade Empregada					
Volatilidade Histórica		Volatilidade Calculada por um Processo GARCH		Volatilidade Implícita da Fórmula de B&S do Dia Útil Anterior	
Sub-precificação	Super-precificação	Sub-precificação	Super-precificação	Sub-precificação	Super-precificação
39,05%	60,95%	39,57%	60,43%	39,88%	60,12%

Ao se comparar o desempenho do modelo de Duan com o de B&S (Tabela 6), observa-se que os resultados desse último modelo são mais próximos de 50%, apesar de, apresentar também, para qualquer volatilidade, um maior número de observações super-precificadas em relação ao preço de mercado.

Tabela 6 – Percentuais de Sub-precificação e Super-precificação do Modelo de B&S para Toda a Amostra para cada Volatilidade Empregada					
Volatilidade Histórica		Volatilidade Calculada por um Processo GARCH		Volatilidade Implícita da Fórmula de B&S do Dia Útil Anterior	
Sub-precificação	Super-precificação	Sub-precificação	Super-precificação	Sub-precificação	Super-precificação
46,40%	53,60%	46,51%	53,49%	48,86%	51,14%

A Tabela 7 é semelhante às Tabelas 5 e 6, exceto que a amostra está dividida de acordo com a proximidade do dinheiro e por semestre, e que o modelo de Duan somente é apresentado com a volatilidade implícita da fórmula de B&S do dia útil anterior. Essa volatilidade foi escolhida por ter apresentado as menores diferenças dos preços dados pelo modelo em relação aos de mercado.

Tabela 7 - Percentuais de Sub-precificação e Super-precificação do Modelo GARCH para cada Semestre, para a Volatilidade Implícita da Fórmula de B&S do Dia Útil Anterior, e em Relação à Proximidade do Dinheiro						
Período	Fora-do-Dinheiro		No-Dinheiro		Dentro-do-Dinheiro	
	Sub-precificação	Super-precificação	Sub-precificação	Super-precificação	Sub-precificação	Super-precificação
95.2	71,72%	28,28%	68,59%	31,41%	32,26%	67,74%
96.1	10,04%	89,96%	15,49%	84,51%	49,42%	50,58%
96.2	8,98%	91,02%	3,74%	96,26%	37,50%	62,50%
97.1	2,36%	97,64%	0,82%	99,18%	41,51%	58,49%
97.2	33,29%	66,71%	13,83%	86,17%	38,39%	61,61%
98.1	62,10%	37,90%	22,22%	77,78%	36,33%	63,67%
98.2	98,55%	1,45%	85,61%	14,39%	36,79%	63,21%
99.1	99,11%	0,89%	94,38%	5,62%	42,68%	57,32%
99.2	87,69%	12,31%	75,89%	24,11%	34,74%	65,26%
00.1	16,36%	83,64%	5,41%	94,59%	37,67%	62,33%

Pode-se verificar que nos semestres em que o GARCH (1,1) é empregado (96.1, 97.1, 97.2 e 00.1) há uma acentuada super-precificação das observações de opções. Essa super-precificação é maior para as fora-do-dinheiro e menor para as dentro-do-dinheiro. Nos outros semestres, excetuando-se o 96.2, há uma acentuada sub-precificação das observações de opções fora e no-dinheiro (nas observações no-dinheiro, o semestre 98.1 também foge a regra). Em todos os semestres, há super-precificação, em relação ao preço de mercado, das opções dentro-do-dinheiro.

6. Conclusões e Considerações Finais

Este trabalho estuda o comportamento do modelo de precificação GARCH (modelo de Duan) ao precificar opções da Telebrás. Para a construção do modelo, é selecionado o processo que mais se adequa a cada semestre entre o GARCH (1,1), EGARCH (1,1) e TARCH (1,1). Três volatilidades diferentes são utilizadas como parâmetro de entrada do modelo: a histórica, a calculada por um processo GARCH e a volatilidade implícita da equação de B&S do dia útil imediatamente anterior. Para desenvolver a investigação, a amostra foi dividida em semestres e quanto à proximidade do dinheiro. Foi estudado também a super ou sub-precificação das opções pelo modelo de Duan em relação ao preço de mercado. O modelo ainda é comparado ao de B&S quanto às diferenças em relação aos preços de mercado.

Nos semestres em que o modelo de Duan utiliza em sua elaboração o GARCH (1,1), as diferenças médias entre o preço de mercado e o preço dado pelo modelo foram maiores, o que indica que o processo EGARCH (1,1) se encaixa melhor neste modelo de precificação ao lidar com opções da Telebrás no período estudado. O processo TARARCH (1,1) não foi selecionado em nenhum semestre. As crises agudas, de uma forma geral, não levaram a maiores diferenças médias entre os preços do modelo e os preços de mercado.

Para toda a amostra, as diferenças médias entre o preço de mercado e o preço dado pelo modelo de Duan são menores quando este utiliza a volatilidade implícita do modelo de B&S do dia útil imediatamente anterior. Este fato se configura em uma distorção, uma vez que como o modelo de Duan utiliza o conceito de heteroscedasticidade dos retornos, a volatilidade calculada por um processo GARCH deveria apresentar diferenças menores que a implícita do modelo de B&S (o qual pressupõe volatilidade constante até o vencimento da opção).

Em relação à proximidade do dinheiro, as diferenças médias entre o preço de mercado e o preço dado pelo modelo de Duan são menores para as observações dentro-do-dinheiro, seguida das no-dinheiro.

Quanto à sub e super-precificação das observações de opções em relação aos preços de mercado, o modelo de Duan super-precifica acentuadamente a maioria das opções quando utiliza, em sua construção, o processo GARCH (1,1), sendo que este fato é mais intenso para observações fora-do-dinheiro. Quando emprega o processo EGARCH (1,1), o modelo, quase na totalidade das vezes, sub-precifica as observações fora e no-dinheiro. As opções dentro-do-dinheiro sempre são super-precificadas.

As diferenças do modelo de B&S são quase sempre menores, em relação ao mercado, do que as do modelo de Duan, para todas as volatilidades empregadas e para todas as proximidades do dinheiro. A sub/super-precificação das opções, em relação aos preços de mercado, pelo modelo de B&S é mais próxima de 50% do que pelo modelo de Duan.

Como sugestão adicional a esse estudo, a estratégia *delta-hedge* poderia ser realizada, a fim de verificar se o modelo de Duan é capaz de gerar lucros no mercado brasileiro.^{xxiv}

Os resultados desta pesquisa podem ter sido prejudicados pela falta de sincronia entre os preços de fechamento do ativo-objeto e das opções. O viés da medida de erro, citado na seção 4, pode ter prejudicado a precificação de opções fora-do-dinheiro. Apesar de ter contribuído para uma melhor comparação, o fato de se utilizar processos GARCH diferentes na construção do modelo de Duan, a cada semestre, pode ter feito com que a análise dos resultados ficasse prejudicada, uma vez que não houve uma uniformidade no modelo. Recomenda-se para próximos trabalhos, a utilização de apenas um processo GARCH que leve em conta o efeito alavancagem, tais como o EGARCH ou o NGARCH, uma vez que os resultados foram inferiores ao se utilizar o GARCH (1,1).

Referências

- ADLER, A. S.; FARIA, H. B.; SANTOS, L. F.; LEMGRUBER, E.F. Árvores Binomiais Implícitas: Aplicação para Opções de Telebrás no Exercício de Abril de 1999. **Anais, XXIII ENANPAD**, 1999.
- AKAIKE, H. Statistical Predictor Identification, **Ann. Inst. Stat. Math.**, vol. 22, pp. 203–217, 1970.
- BESSADA, O. **O Mercado de Derivativos Financeiros**. Editora Record. 2000.
- BLACK, F., Fact and Fantasy in the use of Options. **Financial Analysis Journal**, 31, 36-41 e 61-72. 1975.

- _____. Studies in Stock Price volatility Changes. **Proceedings of 1976 Meeting of The Business and Economic Statistic Section, American Statistical Association**. 177-181. 1976.
- BLACK, F. & SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, 81 (3): 637-59, May 1973.
- BM&F. Serviços. Sistema de Recuperação de Informações. Resumo Estatístico do Pregão. DI-1 dia. Disponível em www.bmf.com.br. Acesso em: 03 jun. 2002.
- BOLLERSLEV, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. **Journal of Econometrics**, 31, 307-327. 1986.
- BOLLERSLEV, T., ENGLE, R. & NELSON, D. ARCH Models. **Handbook Of Econometrics**, Vol. 4. 1994.
- BRENNAN, M. The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models. **Journal of Finance**, 34, 53-68. 1979.
- CUNHA Jr, D.; LEMGRUBER, E. F. **Opções de Dólar no Brasil com Taxas de Juro e de Cupom Estocásticas**, IX Congresso COPPEAD de Administração, Novembro 2002.
- DAY T. & LEWIS C. Stock Market Volatility And The Information Content Of Stock Index Options. **Journal of Econometrics**, 52, 267-287. 1992.
- DERMAN, R. & KANI, I. Riding On a Smile. **Risk**, 7, 32-39. 1994.
- DUAN, J. The GARCH Option Pricing Model. **Mathematical Finance**, 5, 13-32. 1995.
- _____. Cracking The Smile. **Risk**, 9, 55-59. 1996.
- DUAN, J. & ZHANG H. Pricing Hang Sang Index Options Around The Asian Financial Crises - A GARCH Approach. **Journal of Banking and Finance** 25(11), 1989-2014. 2001.
- ENGLE, R. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates Of The Variance Of U.K. Inflation. **Econometrica**, 50, 987-1008. 1982.
- ENGLE, R. & MUSTAFA, C. Implied ARCH Models From Options. **Journal of Econometrics**, 52, 289-311. 1992.
- ENGLE, R. & NG, V. Measuring and Testing The Impact Of News On Volatility. **Journal of Finance**, 48, 1749-1778. 1993.
- GLOSTEN L., JAGANNATHAN R. & RUNKLE D. Relationship Between The Expected Value And The Volatility Of The Nominal Excess Return On Stocks. **Journal of Finance**, 48, 1779-1801. 1993.
- GRIFFITHS, W.; HILL, C.; JUDGE, G. **Econometria**. 1ª edição, São Paulo, 2000, Editora Saraiva.
- GUTELKIN, B., R. ROGALSKI, and S. Tinic. Option Pricing Option Estimates: Some Empirical Results. **Financial Management**, 11, 58-69. 1982.
- HEYENEN, R., KEMNA, A., & VORST, T. Analysis Of The Term Structure Of Implies Volatilities. **Journal of Financial Quantitative Analysis**, 29, 31-46. 1994.
- HULL, J. C. **Options, futures, and other derivatives**. 3.ed. Prentice Hall, 1997.
- _____. _____. 4.ed. Prentice Hall, 1999.
- LANARI, C.S.; SOUZA A.A.; DUQUE, J.C. Desvios em Relação ao Modelo de Black & Scholes: Estudos Relacionados à Volatilidade dos Ativos Subjacentes às Opções. **Anais, XIX ENEGEP**. Rio de Janeiro, 1999.
- LEMGRUBER, E., DONANGELO, A. & SILVA W. Estimadores de Volatilidades para Modelos de Valor em Risco de Ativos Lineares e Não-Lineares: Investigação para Períodos de Crises e Estáveis no Mercado Brasileiro. **Gestão de Risco e Derivativos - Aplicações no Brasil**. Coppead. Ed. Atlas. 2001.
- NELSON, D. Conditional Heteroscedasticity In Asset Returns: A New Approach. **Econometrica**, 59, 347-370. 1991.
- NOH, J., ENGLE R. & KANE A. Forecasting Volatility And Option Prices Of The S&P500 Index. **Journal of Derivatives** Vol.2 No. 1, 17-30. 1994.

RUBINSTEIN, M. The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options. **Journal of Economics**, 7, 407-425. 1976.

_____. Displaced Diffusion Option Pricing. **Journal of Finance**, 38, 213-217. 1983.

_____. Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported \trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through 31, 1978. **Journal of Finance**, 40, 455-480. 1985.

SHEIKH, A. Transaction Data Tests of S&P 100 Call Option Pricing. **Journal of Financial Quantitative Analysis**, 26, 459-475. 1991.

SHWARTZ, G. Estimating the Dimension of a Model, **Ann. Stat.**, vol. 6, p. 461-464, 1978.

TAYLOR, S. Modeling Stochastic Volatility: A Review And Comparative Study. **Mathematical Finance**, 4, 183-204. 1994.

WHALEY, R. Valuation of American Call Options on Dividend-Paying Stocks. **Journal of Financial Economics**, 10, 29-58. 1982.

ⁱ Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. Desenvolvido por Engle (1982).

ⁱⁱ Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic. Desenvolvido por Bollerslev (1986), é uma versão generalizada do ARCH de Engle (1982).

ⁱⁱⁱ É importante distinguir o modelo de precificação GARCH (denominado, neste trabalho, modelo de Duan) do Modelo de Estimativa de Volatilidade GARCH. O primeiro se refere a um modelo de precificação de opções que utiliza a estimação de volatilidade GARCH. Neste estudo, por motivo de diferenciação, denominou-se processo GARCH ao método de previsão de volatilidade.

^{iv} A volatilidade para o ativo-objeto Telebrás é estimada para cada contrato de opção.

^v Ver Hull (1999, p. 237).

^{vi} Duan (1995). O NGARCH, EGARCH e TGARCH são algumas das especificações do modelo GARCH que capturam o “efeito alavancagem”.

^{vii} É pressuposto que exista normalidade condicional dos resíduos dos retornos. Alguns estudos empíricos sobre preços de ações, como os de Bollerslev (1986) e Bollerslev, Engle e Nelson (1994), evidenciam que os resíduos do processo GARCH possuem excesso de curtose. Taylor (1994) sugere o uso de uma distribuição t ou uma distribuição de erros generalizada para o método.

^{viii} Ver Duan e Zhang (2000, p. 8-9).

^{ix} Para o GARCH(1,1), $\sigma_t^2 = \alpha_0 V + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$, com $\omega = \alpha_0 V$ e $\alpha_0 + \alpha + \beta = 1$, a variância incondicional V é igual a $\omega / (1 - \alpha - \beta)$.

^x Ver HULL (1999, p. 372).

^{xi} O preço do ativo-objeto, neste caso, foi utilizado livre de ajustes.

^{xii} Estes métodos se baseiam no critério de aderência que visa comparar medidas de defasagens de modelos alternativos estimados com o mesmo número de observações. Para maiores detalhes dos métodos, ver Griffiths et al (2000).

^{xiii} Esta metodologia para interpolações de taxas prefixadas é sugerida pelo RiskMetrics™ (1994) e vem sendo usada por diversas mesas de negociações de instituições financeiras, segundo Cunha Júnior e Lemgruber (2002).

^{xiv} Como foram utilizadas opções com vencimentos e preços de exercício distintos, diferentes volatilidades implícitas foram obtidas para a mesma data.

^{xv} Esta janela é recomendada por Bessada (2000).

^{xvi} O preço do ativo-objeto, também neste caso, foi utilizado livre de ajustes.

^{xvii} As cotações das ações foram obtidas pelo sistema de informação ECONOMÁTICA.

^{xviii} Em 22/05/1998, a Telebrás foi cindida em 13 empresas de telecomunicações. Após a privatização (que ocorreu em 29/07/1998), criou-se o RCTB - Recibo de Carteira Seleccionada de Ações Telebrás, que permitiu ao investidor negociar um bloco com as 13 ações (semelhante à ação antes da cisão). A partir de 21/09/1998, as ações individuais passaram a poder ser negociadas isoladamente.

^{xix} Quaisquer medidas com base nos retornos, tais como as volatilidades utilizadas, empregam esses preços ajustados.

^{xx} A partir de julho de 2000, as ações e opções da Telebrás perderam liquidez no mercado.

^{xxi} Mesma classificação utilizada por Lemgruber, Donangelo e Silva (2001).

^{xxii} Os resultados foram mostrados somente para a volatilidade implícita de B&S para uma melhor visualização.

^{xxiii} Pela Tabela 4, pode-se observar que as diferenças entre os preços de mercado e os encontrados pelo modelo de B&S são quase sempre menores quando o modelo utiliza a volatilidade implícita de B&S do dia útil anterior.

Isto ocorre porque se utiliza a mesma fórmula para se extrair a volatilidade e para se precificar as opções, com apenas um dia útil de defasagem. Portanto, a comparação, utilizando-se esta volatilidade, dos modelos Duan e B&S não faz sentido.

^{xxiv} O delta para a precificação pelo modelo de Duan pode ser encontrado em Duan (1995).