

# **Uma nova forma de análise da dependência entre mercados financeiros em situações extremas: o coeficiente implícito de dependência extremal**

Autoria: Adonirio Panzieri Filho, Vladimir Belitsky

## **Resumo**

Neste artigo fazemos uma breve revisão da Teoria de Valores Extremos (TVE) e também do uso mais comum dessa teoria em administração de riscos financeiros, que é a estimativa de Valor em Risco (VaR) para quantis muito elevados. Em seguida, mostramos como se constrói uma medida para estimativa de dependência entre retornos de pares de ativos financeiros denominada coeficiente implícito de dependência extremal ( $\lambda$ ).

Os objetivos deste artigo são dois. O primeiro é o de mostrar a aplicação do coeficiente implícito de dependência extremal na avaliação do comportamento da dependência bivariada em amostras de pares de retornos diários de mercados acionários e de dívida externa (para situações de crise ou de booms simultâneos entre mercados). O segundo objetivo é avaliar se entre os mercados acionários brasileiro, argentino e norte-americano a dependência aumenta nas crises e diminui nas situações de euforia, conforme o "fato estilizado" descrito por Longin e Solnik (1999, 2001) sobre os mercados acionários internacionais.

## **Uma nova forma de análise da dependência entre mercados financeiros em situações extremas: o coeficiente implícito de dependência extremal**

Neste artigo fazemos uma breve revisão da Teoria de Valores Extremos (TVE) e também do uso mais comum dessa teoria em administração de riscos financeiros, que é a estimativa de Valor em Risco (VaR) para quantis muito elevados, ou melhor dizendo, de grandes perdas que podem ocorrer em casos raros. Em seguida, mostramos como se constrói uma medida para estimativa de dependência entre retornos de pares de ativos financeiros denominada coeficiente implícito de dependência extremal ( $\lambda$ ) e inicialmente proposta por Panzieri (2001). Há diversos problemas que limitam a aplicação de medidas tradicionais de dependência, apontados, por exemplo, em Boyer, Gibson e Loretan (1999) e em Embrechts, McNeil e Straumann (1999). Embora esses problemas justifiquem a proposta de uma medida dedicada a analisar a dependência em situações extremas, por questão de limitação do tamanho do texto, eles não são tratados neste artigo.

Os objetivos deste artigo são dois. O primeiro é o de mostrar a aplicação do coeficiente implícito de dependência extremal na avaliação do comportamento da dependência bivariada em amostras de pares de retornos diários de mercados acionários e de dívida externa (para situações de crise ou de booms simultâneos entre mercados). Ao mostrar essa aplicação, destacamos um fator crítico na estimativa de  $\lambda$ , que é o número de estatísticas de ordem usadas para determiná-lo ( $k$ ), e avaliamos a sensibilidade das estimativas de  $\lambda$  em relação a  $k$ .

O segundo objetivo é comparar os nossos resultados com os da primeira pesquisa que utilizou a TVE bivariada na análise de dependência de mercados acionários em situações extremas. Essa pesquisa de Longin e Solnik (1999, 2001) concluiu que a dependência dos mercados acionários internacionais aumenta nas crises e diminui nas situações de euforia (booms de mercado), o que os autores interpretam como uma recorrência empírica (ou um "fato estilizado") observável nesses mercados. Portanto, nosso segundo objetivo é avaliar se o fato estilizado descrito por Longin e Solnik também é observável entre os mercados acionários brasileiro, argentino e norte-americano, estudados nesta pesquisa.

Este artigo está organizado em 5 seções. A Seção 1 apresenta os conceitos de TVE utilizados. A Seção 2 mostra como a TVE pode ser aplicada na estimativa de VaR e também como se constrói o  $\lambda$ . A Seção 3 descreve o procedimento experimental adotado para a análise de dependência entre retornos de mercados financeiros usando  $\lambda$  e os principais resultados obtidos. A Seção 4 resume o procedimento experimental e os resultados do trabalho de Longin e Solnik (1999, 2001). A última seção compara os resultados desta pesquisa com os Longin e Solnik e apresenta as conclusões obtidas.

### **1. Os resultados da TVE utilizados neste trabalho**

A revisão dos resultados da Teoria de Valores Extremos apresentada aqui segue, em grande parte, o livro de Embrechts, Kluppelberg e Mikosch (1997), o qual recomendamos àqueles que queiram maiores detalhes sobre a TVE. Também são referências bastante úteis o livro clássico de Galambos (1978) e o de Resnick (1987). Outra referência de grande utilidade é Reiss e Thomas (2001), que disponibilizam o software Xtremes e a linguagem StatPascal, dedicados à análise de valores extremos, utilizados neste trabalho.

Seja  $X$  uma variável aleatória cuja função de distribuição é designada por  $F$ . Pressupomos, para facilitar os argumentos, que  $F$  é uma função contínua. Definimos por  $x_F$  o limite superior<sup>1</sup> dos valores de  $X$ .

Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e distribuídas igualmente à variável aleatória  $X$ . Definimos

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\} \quad (1)$$

e designamos por  $F_{M_n}$  a função de distribuição da variável aleatória  $M_n$ . Assim, a título de exemplo, se  $X_1, X_2, \dots$  forem retornos diários de um ativo financeiro, então  $M_n$  será o retorno máximo entre  $n$  retornos diários consecutivos.

A Teoria de Valores Extremos clássica estuda a existência e as propriedades da distribuição limite das variáveis aleatórias  $a_n + b_n \cdot M_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , para escolha apropriada de seqüências numéricas  $a_n, n \in \mathbb{N}$  e  $b_n, n \in \mathbb{N}$ . Para que possamos formular o resultado sobre a convergência dos máximos precisamos da definição dada a seguir.

Para cada  $\gamma \in \mathfrak{R}$ , definimos uma função de distribuição  $H_\gamma$  da seguinte forma:

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(1 + \gamma \cdot x\right)^{\frac{-1}{\gamma}}\right\}, & \text{se } \gamma \neq 0 \\ \exp\{-\exp(-x)\}, & \text{se } \gamma = 0 \end{cases} \quad (2)$$

para  $x$  na região  $\{x: 1 + \gamma \cdot x > 0\}$ , enquanto para  $x$  fora desta região  $H_\gamma$  deve ser completada por 0 ou por 1 para que satisfaça as condições de uma função de distribuição. A família  $\{H_\gamma, \gamma \in \mathfrak{R}\}$  é denominada família de distribuições generalizadas de valores extremos (Generalized Extreme Values distributions - GEV). Este nome justifica-se pelo seguinte teorema:

**Teorema.** (coletânea dos resultados dos Teoremas 3.2.3 e 3.4.5 de Embrechts, Kluppelberg e Mikosch (1997)). As duas propriedades (i) e (ii) apresentadas abaixo são equivalentes:

(i) Existem duas seqüências  $a_n$  e  $b_n$ , e três números reais  $\gamma, \nu$ , e  $\epsilon$  tais que  $F_{a_n + b_n M_n}(x)$ ,  $x \in \mathfrak{R}$ , a função de distribuição da variável aleatória  $a_n + b_n M_n$ , converge, conforme  $n \rightarrow \infty$ , à função  $H_\gamma(\nu + \epsilon \cdot x)$ ,  $x \in \mathfrak{R}$ .

(ii) Existem um número real  $\gamma$  e uma função  $c: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$  tais que

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{u \leq y < x_F} \left| \Pr\left[\frac{X - u}{\sigma(u)} \leq y \mid X > u\right] - G_\gamma(y) \right| = 0 \quad (3)$$

onde

$$G_\gamma(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & \text{se } \gamma \neq 0 \\ 1 - (1 + \gamma \cdot y)^{\frac{-1}{\gamma}}, & \text{se } \gamma = 0 \end{cases} \quad (4)$$

para  $y$  na região  $\{y: y \geq 0 \text{ e } y \leq \frac{-1}{\gamma}\}$ , caso  $\gamma < 0$ , e da região  $\{y: y > 0\}$ , caso  $\gamma \geq 0$ ; fora destas regiões  $G_\gamma$  deve ser completada por 0 ou por 1 para que satisfaça as condições de uma função de distribuição.

A função de distribuição  $G_\gamma$  em (3) é chamada de Distribuição de Pareto Generalizada (Generalized Pareto Distribution - GPD).

Vale destacar que a TVE afirma existir a seguinte dicotomia: ou para qualquer escolha de seqüências  $a_n$  e  $b_n$ , a seqüência de funções  $F_{a_n + b_n M_n}(x)$ ,  $x \in \mathfrak{R}$ , não converge para nenhuma função de distribuição, a não ser a degenerada, ou existem seqüências  $a_n$  e  $b_n$  tais que ocorre a convergência para uma função de distribuição não degenerada e neste caso a função limite é do tipo  $H_\gamma$ . Note que dizer que uma função é do tipo de  $H_\gamma$  significa dizer

que esta função pode ser obtida de  $H_\gamma$  por transformação linear do seu argumento:  $x = \nu + \delta \cdot x$ , para números apropriados  $\gamma$  e  $\delta$ .

Existem diversas formas de condições que garantem a convergência dos máximos. Uma delas é (ii), a qual é não só uma condição suficiente, mas também necessária.

O parâmetro  $\gamma$  é chamado de *índice de cauda* para GPD e, caso haja a convergência (3), também para a distribuição de  $X$ . Vamos nos referir a ele como índice de cauda também no âmbito da GEV, quer dizer, para  $H_\gamma$ . Embora neste âmbito ele determine não somente a cauda, mas toda a distribuição limite dos máximos, a escolha é justificada pela equivalência entre (i) e (ii) como afirmado pelo teorema: o parâmetro  $\gamma$  em (i) e em (ii) do Teorema é o mesmo.

### 1.1 Método de estimação das caudas

Seja  $F$  a função de distribuição da variável aleatória  $X$ . Colocamos agora o problema de descobrir o comportamento assintótico de  $F(x)$ ,  $F(x)$ ,  $x \in \mathfrak{R}$ , quando  $x \rightarrow \infty$ , a partir das observações  $x_1, \dots, x_N$  independentes da variável aleatória  $X$ . Em linguagem coloquial pode-se dizer que este é o problema de estimação, ou reconstituição, da cauda direita de  $F^{\text{ii}}$ . A solução proposta baseia-se na suposição de que a propriedade (ii) do Teorema vale.

Para  $\gamma \in \mathfrak{R}$ ,  $\mu \in \mathfrak{R}$  e  $c > 0$  definimos a função  $G_{\gamma, \mu, \sigma}(x)$ ,  $x \in \mathfrak{R}$  por

$$G_{\gamma, \mu, \sigma}(x) = G_\gamma\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad x \in \mathfrak{R}. \quad (5)$$

onde:

- $G_{\gamma, \mu, \sigma}(x)$  é uma GPD;
- $\mu$  é o parâmetro de localização;
- $c$  é o parâmetro de escala; e

É fácil ver que a propriedade (ii) implica que para  $u$  suficientemente grande,  $F(x)$ ,  $x \geq u$ , está próxima à função

$$\Pr[X > u] G_{\gamma, u, \sigma(u)}(x) + \Pr[X \leq u], \quad x \geq u. \quad (6)$$

Esta aproximação é a base para reconstituir a cauda de  $F$  a partir das observações  $x_1, \dots, x_n$ . Ela sugere naturalmente o seguinte algoritmo de aproximação da cauda direita, denominado método "excedentes além de um limiar" (Peaks Over a Threshold - POT):

(a) Ordenar a amostra  $x_1, \dots, x_n$  em ordem decrescente e escolher os  $k$  maiores valores:

$$x_{n,k}, x_{n,k-1}, \dots, x_{n,1}.$$

(b) Fazer  $u = x_{n,k}$  e usar estes  $k$  valores para obter as estimativas  $\hat{\gamma}$ , e  $\hat{c}(u)$  de  $\gamma$  e  $c(u)$ ; estimar  $\Pr[X > u]$  por  $1 - \hat{F}(u)$  e  $\Pr[X < u]$  por  $\hat{F}(u)$ .

onde:

- $\hat{F}$  é a distribuição empírica de  $X$  construída na base de  $x_1, \dots, x_n$ ;
- $u$  é o limiar acima do qual os valores que  $x$  assume são considerados como pertencentes à cauda. Note que no procedimento descrito acima ele coincide com  $\mu$ ;
- $\gamma$  é o índice caudal; e
- $k$  é o número de estatísticas de ordem utilizado na estimativa dos parâmetros.

O método POT fornece a expressão (6) com as estimativas  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{u}$ , e  $\hat{c}(u)$  para os parâmetros  $\gamma$ ,  $u$  e  $c$ , como uma estimativa da cauda de  $F$  à direita de  $u$ . As propriedades assintóticas desta cauda são deduzidas a partir das propriedades assintóticas da expressão usada para a aproximação.

## 1.2 A estimativa de VaR

O Valor em Risco (VaR) é geralmente definido como o capital necessário para cobrir as perdas geradas por uma carteira ao longo de um determinado período pré-estabelecido de carregamento dessa carteira e para um determinado nível de confiança (Jorion (2000), Kellezi e Gilli (2000) e McNeil (2000)). Considerando os retornos de uma carteira como sendo uma variável aleatória tal que

$$X_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1}) \quad (7)$$

onde,  $S_t$  representa o valor da carteira no momento  $t$  e  $S_{t-1}$  é o valor no momento  $t - 1$ . Denotamos a função de distribuição de  $X$  por  $F_x$  e o Valor em Risco de  $X$  ao nível  $\alpha$  de confiança por  $VaR_\alpha(X)$ . Definimos o  $VaR_\alpha(X)$  como a solução da equação:

$$F_x(VaR_\alpha(X)) = \alpha \quad (8)$$

portanto,

$$VaR_\alpha(X) = F_x^{-1}(\alpha) \quad (9)$$

onde,  $F_x^{-1}$  é a função quantil, definida como inversa da função de distribuição.

Para estimar o VaR de um ativo usando o método POT da TVE, deve-se partir de uma amostra de retornos calculados como em (7) e aproximar a cauda desta por uma GPD seguindo o método apresentado na subseção 1.1.<sup>iii</sup>

Assim, sejam  $k$ ,  $c$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$  os parâmetros desta aproximação (também definidos e explicados naquela subseção) e  $G$  a correspondente GPD, então o VaR de nível  $\alpha$  (para aproximação da cauda esquerda) para a variável aleatória  $X$  é:

$$VaR_\alpha(X) = \frac{c}{\gamma} \left( (1 - \alpha)^{-\gamma} - 1 \right) + \mu. \quad (10)$$

Note que o lado direito da fórmula (10) é exatamente  $G^{-1}(1 - \alpha)$ . Ele foi obtido pela inversão da fórmula explícita da GPD.

## 1.3 A estimativa de VaR para uma carteira de ativos

Vamos agora estimar o VaR de uma carteira com dois ativos, um cujos retornos é dado pela variável aleatória  $X$  e outro cujos retornos é dado pela variável aleatória  $Y$ . Supondo que os pesos de cada ativo na carteira sejam constante e dados por  $p$  para  $X$  e  $(1 - p)$  para  $Y$ . Suponhamos que dispomos das observações dos valores dos retornos de  $X$  e de  $Y$  anotados durante  $n$  dias passados

$$(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \quad (11)$$

Então, o problema de estimar o VaR da carteira de dois ativos pode ser resolvido analogamente à estimação do VaR de um ativo se definirmos a variável  $Z$  como:

$$Z := p \cdot X + (1 - p) \cdot Y \quad (12)$$

Portanto, o VaR da carteira de dois ativos para o nível  $\alpha$  de confiança é simplesmente o  $VaR_\alpha(Z)$ . Essa solução pode ser facilmente estendida para carteiras com mais de dois ativos.

Uma outra abordagem para cálculo de VaR de carteira de ativos é a utilizada pelo RiskMetrics (Riskmetrics Group, 1996), que permite estimar o VaR da carteira a partir do VaR individual de seus ativos, das correlações entre os ativos e dos pesos dos ativos na carteira. A fórmula de agregação de riscos utilizada pelo RiskMetrics, para uma carteira de  $m$  ativos é:

$$VaR_{\alpha}(Z) = \left( \sum_{i,j=1}^m w_i \cdot w_j \cdot \lambda_{ij} \cdot VaR_{\alpha}(X_i) \cdot VaR_{\alpha}(X_j) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

onde:

- $VaR_{\alpha}$  se refere ao VaR de frequência  $f$  e nível  $\alpha$  e;
- a variável aleatória  $X_i$  designa o retorno do  $i$ -ésimo ativo;
- $Z$  é uma variável aleatória que representa o retorno de frequência  $f$  de uma carteira, que é composta de  $m$  ativos, sendo que o  $i$ -ésimo ativo tem peso  $w_i$ .

A complexidade teórica dos modelos de TVE multivariados e o alto custo computacional representado pela estimativa de VaR de carteiras pela TVE usando a solução de agregar os retornos individuais dos ativos e tratar a estimativa do VaR da carteira como se fosse a da estimativa do VaR de apenas ativo, levaram Longin (1999 e 2000) a propor a utilização de (13) como uma *proxy* para estimativa de VaR de carteiras usando a Teoria de Valores Extremos. É justamente a partir da utilização de (13) como *proxy* da estimativa por meio da agregação de retornos que Panzieri (2001) propôs a criação do coeficiente implícito de dependência extremal.

#### 1.4 A estimativa do coeficiente implícito de dependência extremal

Descrevemos agora a forma de determinação dos coeficientes  $\lambda$  do nosso método<sup>iv</sup>. Como eles dependem do nível  $\alpha$  para o qual o VaR é procurado, consideramos  $\alpha$  fixo. Mostramos o cálculo do  $\lambda$  para um par  $(x, y)$ . Seja  $p \in [0, 1]$  um valor arbitrário. Construímos uma carteira composta de  $p$  ativos  $x$  e  $(1 - p)$  ativos  $y$ . Designamos por  $Z(p)$  o retorno de frequência  $f$  desta carteira. Lembramos que os retornos durante este período dos ativos  $x$  e  $y$  foram denotados por  $X$  e  $Y$ . Conseqüentemente temos que  $Z(p) = p \cdot X + (1 - p) \cdot Y$ . Designamos por  $x_1, \dots, x_n$  e por  $y_1, \dots, y_n$  as  $n$  observações dos retornos de frequência  $f$  dos ativos  $x$  e  $y$ . Definindo  $z := p \cdot x + (1 - p) \cdot y$  temos que  $z_1, \dots, z_n$  é uma amostra da variável aleatória  $Z(p)$ . Usamos agora estas três amostras para estimar  $VaR_{\alpha}(Z(p))$ ,  $VaR_{\alpha}(X)$  e  $VaR_{\alpha}(Y)$ . Agora  $\lambda$  declara ser o valor que minimiza a expressão

$$\int_0^1 p^2 (VaR_{\alpha}(X))^2 + 2\lambda p(1-p) VaR_{\alpha}(X) VaR_{\alpha}(Y) + (1-p)^2 (VaR_{\alpha}(Y))^2 - (VaR_{\alpha}(Z(p)))^2 \Big] dp \quad (14)$$

Observamos que a função de dependência manifestou-se em valores da amostra  $z$  e, portanto,  $VaR_{\alpha}(Z(p))$  calculado com base nesta amostra é o correto VaR da carteira. O que se quer fazer é achar o valor  $\lambda$  que aproxima, da melhor maneira possível e para todos valores de  $p$ , este VaR correto pela combinação dos VaR dos dois ativos que a compõem.

É fácil entender que a posição detida em um ativo financeiro condiciona o seu VaR. Para uma posição longa no ativo, as perdas serão causadas por retornos negativos. Já para uma posição curta, as perdas serão causadas por retornos positivos do ativo. Ao estimarmos o

coeficiente implícito de dependência extremal de uma carteira com dois ativos, iremos nos deparar, portanto, com 4 possíveis combinações que definem 4 diferentes  $\lambda$ :

- posição longa em ambos os ativos:  $\lambda^{ll}$ ;
- posição curta em ambos os ativos  $\lambda^{ss}$ ;
- posição curta no primeiro e longa no segundo ativo:  $\lambda^{sl}$ ; e
- posição curta no primeiro e longa no segundo ativo:  $\lambda^{ls}$ .

### 3. O Procedimento experimental

A medida de dependência utilizada neste trabalho permite aproximar quantis elevados de distribuição bivariada pela combinação dos quantis das distribuições marginais. Vamos analisar o comportamento do coeficiente implícito de dependência extremal em duas situações:

- posições longas nos dois ativos: risco de quedas conjuntas refletido por  $\lambda^{ll}$  e;
- posições curtas nos dois ativos: risco de altas conjuntas refletido por  $\lambda^{ss}$ .

Para estudar se a dependência entre mercados cresce em situações de crise (quedas de preço extremas simultâneas) analisamos como o  $\lambda^{ll}$  varia em relação a quantis tendendo ao extremo da cauda direita da função distribuição acumulada estimada a partir de amostra com sinais invertidos. Escolhemos arbitrariamente alguns  $\alpha$  suficientemente elevados e observamos como a medida de dependência evolui com o aumento do  $\alpha$ . Por exemplo: se o par de ativos for composto por retornos diários dos índices do Ibovespa e Merval, então  $\lambda^{ll}$  para  $\alpha = 0,95$  exprime a dependência estimada entre os 5% menores retornos (perdas) do Ibovespa e os 5% menores retornos do Merval.<sup>v</sup>

Analogamente, também estudamos se a dependência entre mercados cresce em situações de euforia (altas de preços extremas simultâneas) através da análise de como o  $\lambda^{ss}$  varia em relação a quantis tendendo ao extremo da cauda direita da função distribuição acumulada.

Tabela 1: Ativos analisados e estatísticas descritivas de suas amostras de retornos diários

	EI	FRB	IBOVESPA	MERVAL	NASDAQ
Mercado	Renda fixa		Acionário		
Tipo	Títulos de dívida externa		Índice de bolsa		
País	Brasil	Argentina	Brasil	Argentina	EUA
Média	0.000162	0.0000321	0.003755	0.000867	0.000442
Mediana	0.000429	0.00011	0.002238	0.000524	0.00113
Máximo	0.157301	0.100022	0.288176	0.249109	0.132546
Mínimo	-0.237645	-0.098937	-0.251929	-0.16653	-0.120478
Número de observações	1597	1382	7790	2663	7339
Data início	08-Nov-1994	27-Jan-1995	03-Jan-1968	09-Jan-1990	08-Fev-1971
Data fim	16-Fev-2001	16-Fev-2001	16-Fev-2001	16-Fev-2001	16-Fev-2001

Como não fizemos qualquer suposição sobre a função de dependência, não foi possível estabelecer intervalo de confiança para as estimativas de  $\lambda$  geradas. Sabemos, no entanto, que as estimativas de  $\lambda$  são sensíveis ao número  $k$  de estatísticas de ordem usadas para gerá-las. Vamos, por esta razão, avaliar o grau de sensibilidade das estimativas quando  $k$  varia dentro de um intervalo que provavelmente contém o  $k$ -ótimo.

O experimento foi realizado com amostras de séries de retornos diários (variações logarítmicas de preços) dos cinco ativos descritos na Tabela 1 e consistiu na estimação de  $\lambda^H$  e  $\lambda^{SS}$  para cada um dos 10 pares de amostras analisados (EI-FRB, Merval-FRB, Merval-EI, IBOVESPA-FRB, IBOVESPA-Merval, IBOVESPA-NASDAQ, IBOVESPA-EI, NASDAQ-Merval, NASDAQ-FRB, NASDAQ-EI) e para 7 quantis (denominados  $\alpha$  e com valores de 0,95, 0,96, 0,97, 0,98, 0,99, 0,995 e 0,999). Em cada um desses casos, foram geradas 50 estimativas aleatórias de  $k$  para valores entre 5% e 15% do tamanho da amostra (faixa na qual espera-se que o k-ótimo se encontre) e, usando estas estimativas de  $k$ , foram calculadas 50 estimativas de  $\lambda$ .

Usando essas estimativas de  $\lambda^H$  e  $\lambda^{SS}$ , geramos gráficos do tipo boxplot de  $(\lambda^H, \alpha)$  e  $(\lambda^{SS}, \alpha)$  para cada par de mercados. Esses gráficos permitiram analisar se a dependência entre os mercados apresenta tendência de queda ou de alta para graus crescentes de crises ou euforia.

### 3.1 Resultados

Os resultados do procedimento experimental estão nas Figuras 1 a 20. A Tabela 2, abaixo, resume os resultados obtidos no procedimento experimental quanto à tendência do comportamento da dependência dos mercados em situações extremas.

Tabela 2: Resumo dos resultados sobre o comportamento da dependência dos mercados em situações extremas

Par de ativos	Cauda	Tendência do coeficiente implícito de dependência extremal
EI-FRB	Direita	Queda
	Esquerda	Queda
Merval-FRB	Direita	Queda
	Esquerda	Alta
Merval-EI	Direita	-
	Esquerda	Alta
IBOVESPA-FRB	Direita	Queda
	Esquerda	Alta
IBOVESPA-Merval	Direita	Queda
	Esquerda	-
IBOVESPA-NASDAQ	Direita	Queda
	Esquerda	Queda
IBOVESPA-EI	Direita	Alta
	Esquerda	Alta (até 0,995)
NASDAQ-Merval	Direita	Queda
	Esquerda	Queda
NASDAQ-FRB	Direita	Queda
	Esquerda	Queda
NASDAQ-EI	Direita	Queda
	Esquerda	Queda

Apresentamos agora um breve relato sobre os resultados obtidos, classificados de acordo com o tipo de mercados envolvidos.

**Dívida externa x Dívida externa** - A análise da dependência entre títulos de dívida externa do Brasil (EI) e da Argentina (FRB) mostra que, embora altamente dependentes em



situações menos extremas ( $\lambda$  próximo a 0,8 para  $\alpha = 0,95$  tanto para as caudas direita quanto esquerda), a dependência cai em situações de crises ou booms. Esta conclusão é particularmente relevante se olhada pelo lado da queda de dependência nas situações de crise mais extremas. Ela indica que, nas situações de crises extremas os retornos desses papéis de dívida dos governos brasileiro e argentino não caminham mais atrelados do que em situações normais de mercado. Isto significa que, ao precificar estes papéis, o mercado consegue, em certo grau, separar as crises extremas do Brasil das crises extremas da Argentina.

Verificamos também que a dependência nos extremos cai com velocidade diferente para as situações de crise e boom. As figuras 1 e 2 mostram que para situação de booms mais extremos a queda é mais acentuada ( $\lambda^{ss}$  chega a 0,4 para  $\alpha = 0,995$ ) que para situações de crises mais extremas ( $\lambda''$  chega a 0,6 para  $\alpha = 0,995$ ).

**Dívida externa x Mercado acionário** - Analisamos as dependências entre os títulos da dívida externa brasileira e argentina e mercados acionários do Brasil (IBOVESPA), Argentina (MERVAL) e Estados Unidos (NASDAQ).

Os comportamentos das dívidas brasileiras e argentina em relação ao NASDAQ são muito semelhantes. Relativamente baixos ( $\lambda$  próximo a 0,4 para  $\alpha = 0,95$  tanto para as caudas direita quanto esquerda) eles tendem a zero conforme as crises ou booms tornam-se mais extremos.

O comportamento da dívida brasileira (EI) em relação ao mercado acionário argentino (MERVAL) revela a existência de aumento de dependência em situações de crise, mas é não claro que haja este aumento em situações de booms. Para situação invertida, de dívida argentina (FRB) e mercado acionário brasileiro (IBOVESPA), o comportamento na crise é muito semelhante. A dependência entre os mercados aumenta de forma significativa e clara. Por outro lado, para booms de mercado há tendência de queda na dependência.

Os resultados dos mercados de dívida externa do Brasil e Argentina em relação aos seus próprios mercados acionários não são tão semelhantes quanto os observados nos cruzamentos desses mercados entre países. A dependência entre os mercados de dívida externa e acionário do Brasil tende a ficar mais forte nos booms e nas crises (não é claro para  $\alpha = 0,999$ ). Já no caso argentino, a dependência cresce nas crises e decai nos booms.

De forma geral, concluímos que os retornos do NASDAQ tendem a ser independentes dos retornos das dívidas do Brasil e Argentina analisados para situações tendendo ao extremo, tanto de crises quanto de booms. Por outro lado, concluímos que quanto piores forem as quedas de preços do EI ou do FRB (IBOVESPA ou do MERVAL) maior será a tendência dessas quedas estarem associadas às piores quedas do IBOVESPA ou do MERVAL (ou do EI ou do FRB).

**Mercado acionário x Mercado acionário** - Analisamos três casos de dependência: dos mercados acionários do Brasil (IBOVESPA) e da Argentina (MERVAL); do Brasil (IBOVESPA) e dos EUA (NASDAQ) e; da Argentina (MERVAL) e dos EUA (NASDAQ).

Os mercados acionários do Brasil e da Argentina revelaram dependência fraca (para  $\alpha = 0,95$ ,  $\lambda$  é próximo a 0,3 tanto para a cauda direita quanto esquerda) e tendência de queda fraca tanto para booms quanto para crises tendendo mais ao extremo.

Os comportamentos dos mercados acionários brasileiro e argentino são semelhantes em relação ao NASDAQ. A dependência para  $\alpha = 0,95$  é fraca ( $\lambda$  menor do que 0,3 tanto para a cauda direita quanto esquerda) e cai nas situações de booms e euforia extremos.

Antes de concluir este artigo, vamos revisar brevemente o trabalho de Longin e Solnik (1999, 2001) para poder discutir em que medida as conclusões daqueles autores são comparáveis às nossas.

#### 4. O trabalho de Longin e Solnik

Longin e Solnik (1999, 2001) usaram um estimador de correlação entre pares de retornos extremos obtido da TVE bivariada para analisar a dependência entre mercados em situações extremas. Seu objetivo era avaliar empiricamente o comportamento das dependências entre pares de retornos de índices de ações para vários graus de eventos extremos. Formalmente, sua avaliação consistiu em testar a hipótese de independência assintótica dos retornos extremos, o que é o mesmo que testar se a distribuição é normal multivariada<sup>vi</sup>.

Longin e Solnik usaram uma abordagem completamente paramétrica na estimativa das dependências entre pares de retornos. A distribuição de retornos extremos bivariada foi modelada através das caudas das distribuições marginais (aproximadas por GPD) e por uma função de dependência. Escolheram, arbitrariamente, a função Gumbel do tipo 1 para modelar a estrutura de dependência bivariada.

Esta escolha facilitou a obtenção do coeficiente de correlação linear necessário à análise pretendida pelos autores, pois a Gumbel do tipo 1 é formada por combinação das distribuições marginais GPD e um parâmetro que apresenta uma relação matemática simples com o coeficiente de correlação linear.

Após definirem a hipótese a ser testada (independência assintótica) e o instrumento de teste (coeficiente de correlação linear extraído da função de dependência Gumbel tipo 1), os autores analisaram o comportamento de retornos mensais dos mercados acionários dos EUA, Inglaterra, França, Alemanha e Japão, no período de janeiro de 1959 a dezembro de 1996. Estimaram as correlações quando os mercados ultrapassavam os níveis (também definidos de forma arbitrária) de 3%, 5%, 8%, 10% (pontos percentuais) além da média estimada. Procedendo dessa forma, rejeitaram a hipótese nula de normalidade multivariada para a cauda negativa, mas não para a cauda positiva. Isso porque a correlação diminui (tendendo a zero) quando se aumenta o limiar positivo, mas não diminui quando se aumenta o limiar negativo.

Também encontram que a correlação não é relacionada à volatilidade de mercado, mas à tendência de mercado. Para eles, a correlação aumenta em mercados com tendência de baixa, mas não em mercados com tendência de alta.

#### 5. Conclusões

Embora tenhamos usado uma técnica distinta da aplicada por Longin e Solnik (1999, 2001), a nossa avaliação do comportamento da dependência entre mercados acionários em situações extremas pode ser comparada aos resultados do estudo daqueles autores. Ambos os estudos utilizam técnicas da TVE para fazer inferência sobre a dependência entre pares de retornos de mercados acionários conforme o limiar dos casos raros aumenta. Ambos permitem inferir se a dependência aumenta ou diminui em casos de crises ou booms. O trabalho de Longin e Solnik, no entanto, busca uma medida de correlação linear para medir essa dependência, o que não é o caso do nosso trabalho. Não fizemos hipótese de que a dependência deva ser linear, apenas procuramos extrair como ela se manifesta nos dados. Outro fator que diferencia as pesquisas é quanto à frequência dos dados. Analisamos retornos diários, enquanto Longin e Solnik analisaram retornos mensais. Se, por um lado, nossa análise é prejudicada pela questão da influência de fusos horários (que minimizamos ao escolher mercados acionários que funcionam com pouca diferença de fuso horário), por outro lado, a análise de Longin e Solnik fica discutível pela baixa quantidade de dados utilizados (apenas 456 observações) para aplicação de uma técnica de TVE bivariada. Quanto ao aspecto de análise formal, o estudo de Longin e Solnik apresenta uma vantagem em relação ao nosso por

terem testado estatisticamente a hipótese de dependência, enquanto no nosso estudo foi possível apenas fazer uma análise gráfica de tendência por gráficos boxplot.

Como já vimos, Longin e Solnik concluem naquele estudo que a correlação em mercados acionários internacionais aumenta quando há tendência de baixa, mas não aumenta quando há tendência de alta. A nossa avaliação da dependência por  $\lambda$  indica conclusão diferente da apontada por esses autores. Não obtivemos evidência, para pares de mercados acionários, de que a dependência aumente. Seja nos casos de crises ou booms. Note-se que a conclusão a que chegamos é especialmente relevante por tratar dos mercados acionários do Brasil e Argentina. Conseguimos identificar uma relação de dependência crescente em situações de crises mais extremas quando estudamos os mercados de dívida externa desses dois países (EI-FRB) ou quando estudamos os mercados de dívida externa em relação às bolsas (EI-MERVAL, EI-IBOVESPA, FRB-MERVAL ou FRB-IBOVESPA). Assim, mesmo no caso de dois países com mercados fortemente associados, a dependência entre suas bolsas não é necessariamente mais forte em situações de crises extremas.

Portanto, a conclusão do nosso estudo quanto à dependência entre pares de mercados acionários aponta três resultados que contrariam a conclusão de Longin e Solnik (1999, 2001), considerada "fato estilizado", de que a dependência cresce em mercados acionários internacionais com tendência de baixa extrema.

Figura 1: EI-FRB - Evolução da dependência nos extremos superiores.

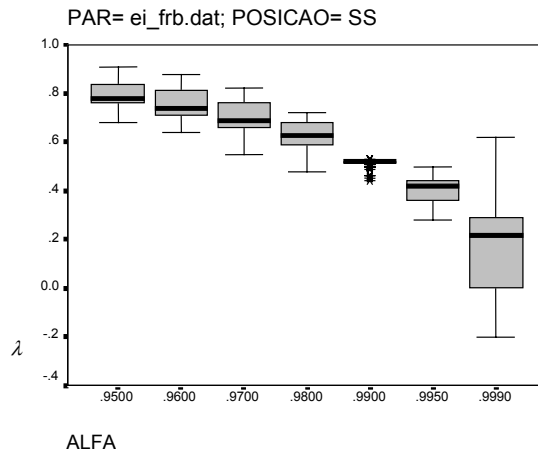


Figura 4: Merval-FRB - Evolução da dependência nos extremos inferiores.

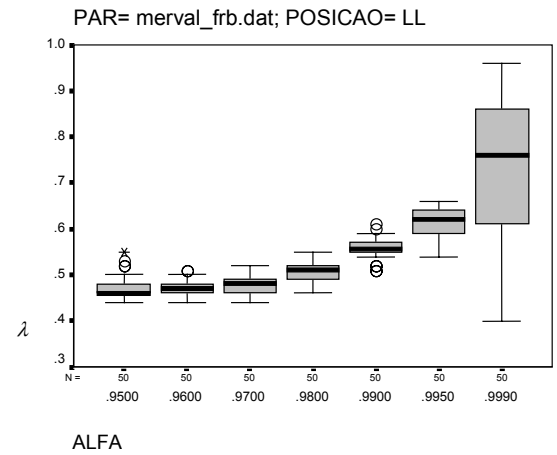


Figura 2: EI-FRB - Evolução da dependência nos extremos inferiores.

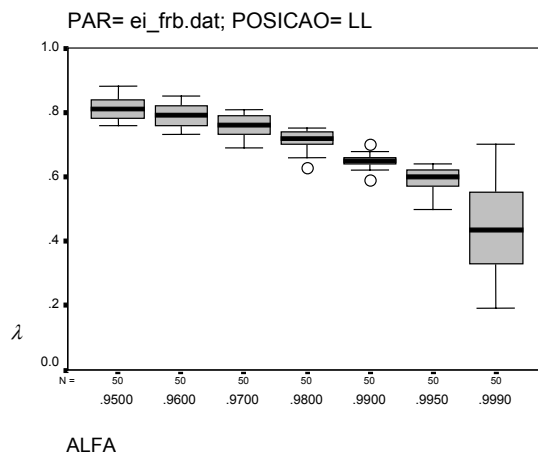


Figura 5: Merval-EI - Evolução da dependência nos extremos superiores.

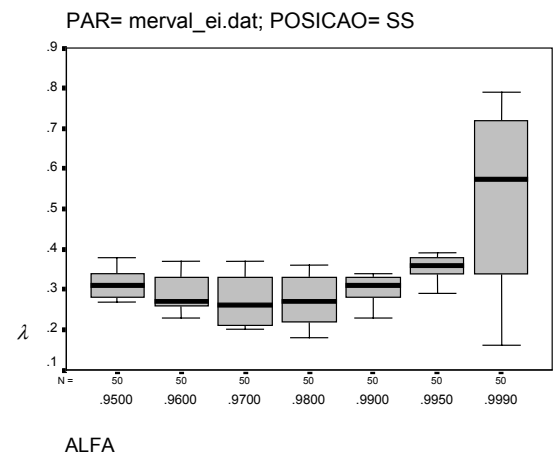


Figura 3: Merval-FRB - Evolução da dependência nos extremos superiores.

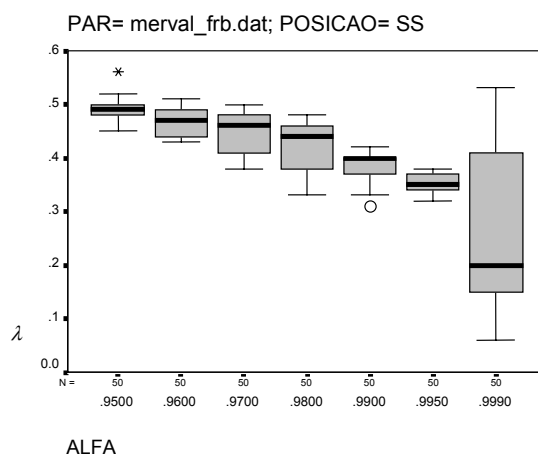


Figura 6: Merval-EI - Evolução da dependência nos extremos inferiores.

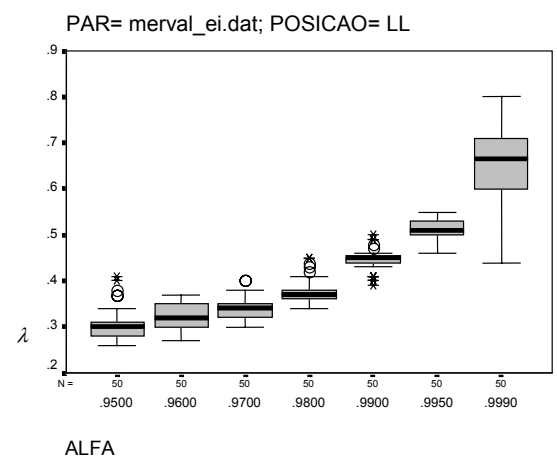


Figura 7: IBOVESPA-FRB - Evolução da dependência nos extremos superiores.

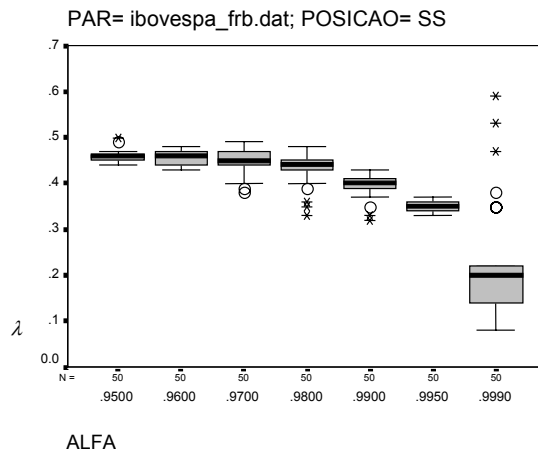


Figura 8: IBOVESPA-FRB - Evolução da dependência nos extremos inferiores.

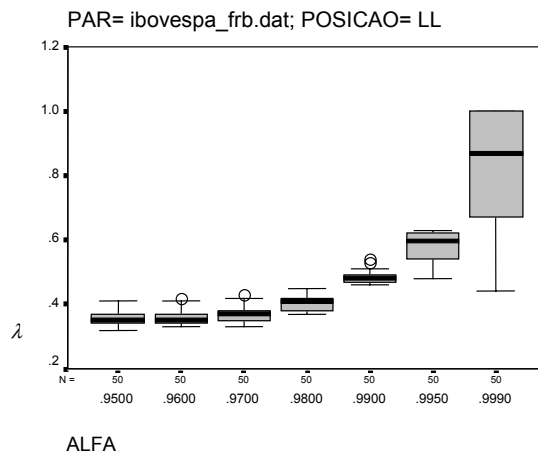


Figura 9: IBOVESPA-MERVAL - Evolução da dependência nos extremos superiores.

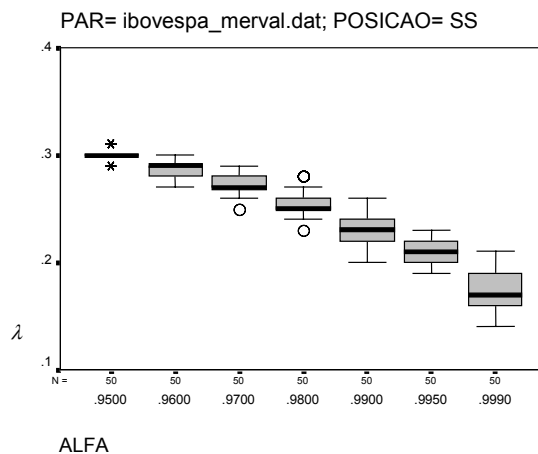


Figura 10: IBOVESPA-MERVAL - Evolução da dependência nos extremos inferiores.

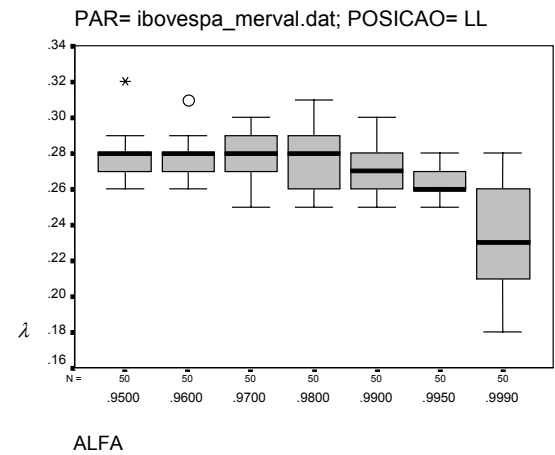


Figura 11: IBOVESPA-NASDAQ - Evolução da dependência nos extremos superiores.

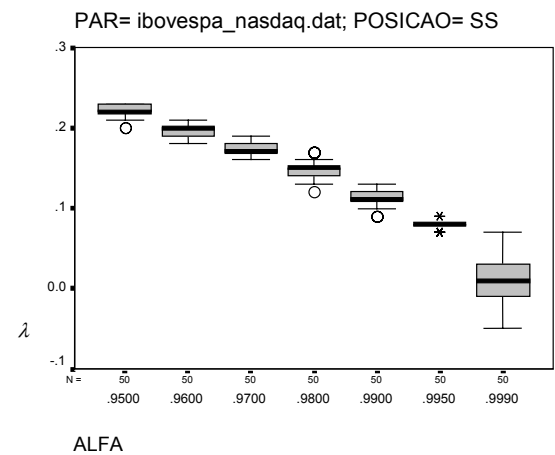


Figura 12: IBOVESPA-NASDAQ - Evolução da dependência nos extremos inferiores.

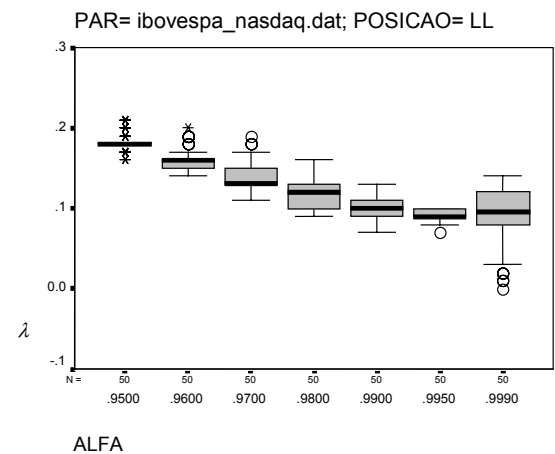


Figura 13: IBOVESPA-EI - Evolução da dependência nos extremos superiores.

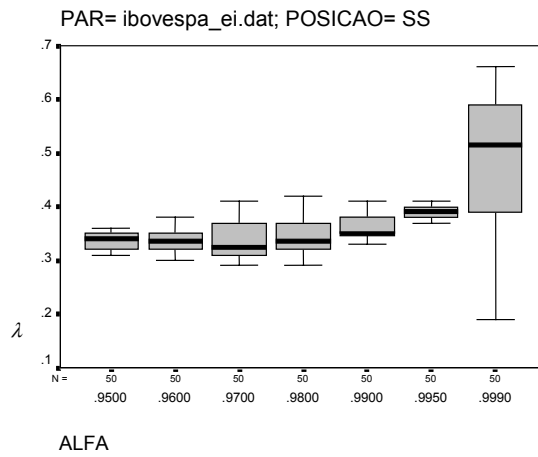


Figura 14: IBOVESPA-EI - Evolução da dependência nos extremos inferiores.

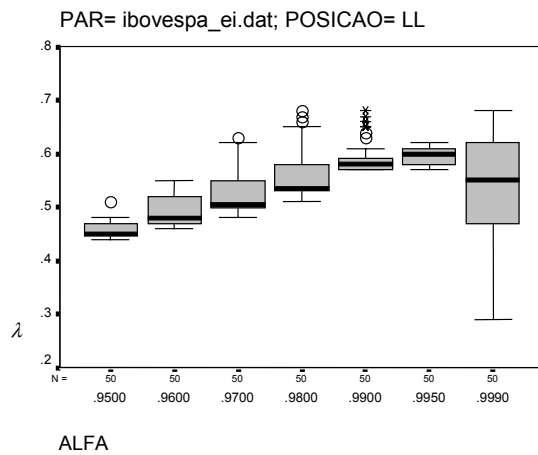


Figura 15: NASDAQ-MERVAL - Evolução da dependência nos extremos superiores.

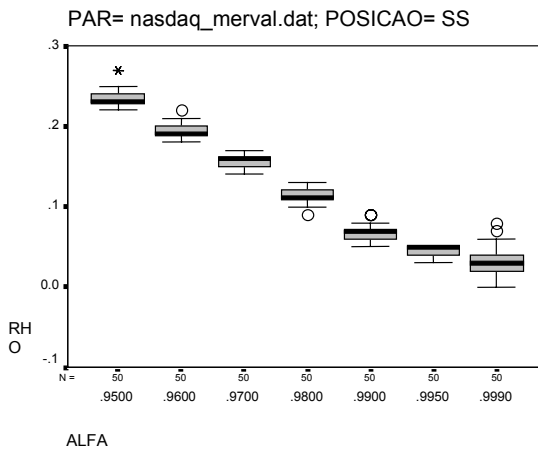


Figura 16: NASDAQ-MERVAL - Evolução da dependência nos extremos inferiores.

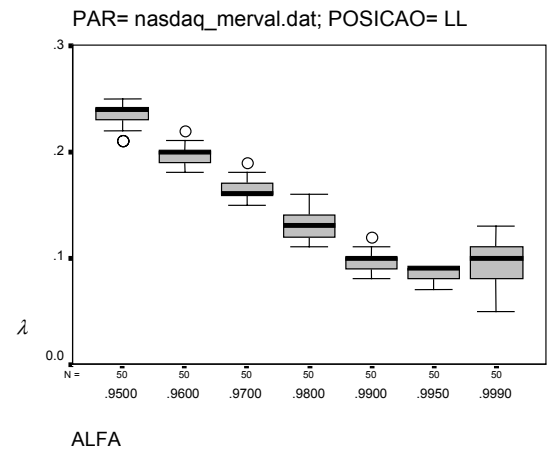


Figura 17: NASDAQ-FRB - Evolução da dependência nos extremos superiores.

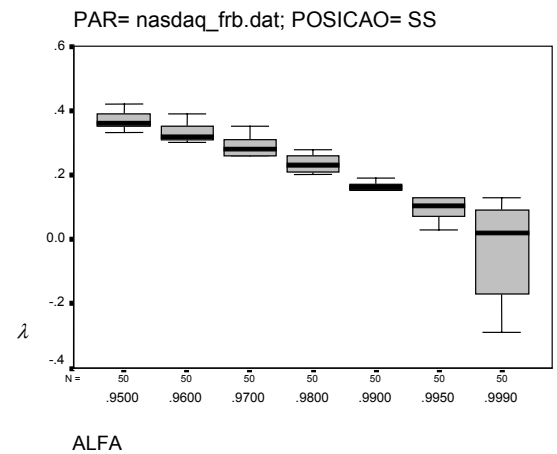


Figura 18: NASDAQ-FRB - Evolução da dependência nos extremos inferiores.

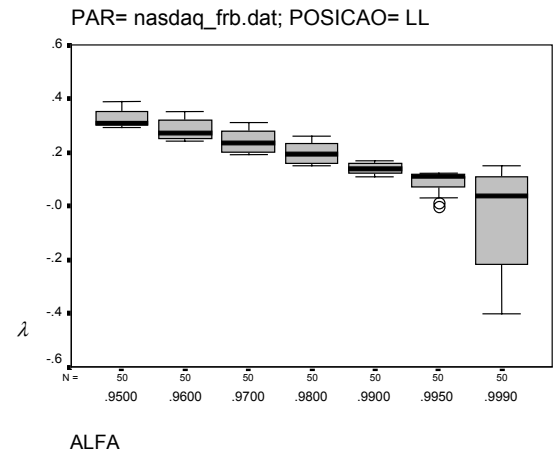


Figura 19: NASDAQ-EI - Evolução da dependência nos extremos superiores.

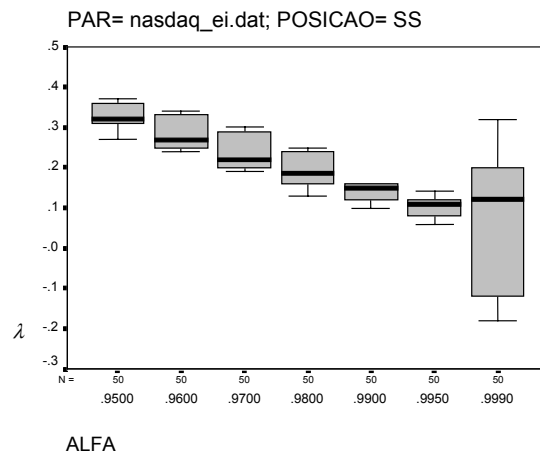
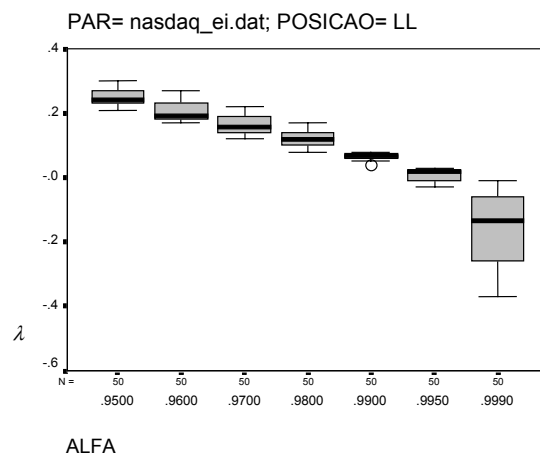


Figura 20: NASDAQ-EI - Evolução de  $\lambda''$ . Dependência nos extremos inferiores.



## Referências

- Boyer, B. H., Gibson, M. S., Loretan, M. *Pitfalls in tests for changes in correlations*. Board of governors of the Federal Reserve System: International Finance Discussion Papers 597, mar/1999. [www.bog.frb.fed.us](http://www.bog.frb.fed.us)
- Embrechts, P., Kluppelberg, C., Mikosch T. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Berlin: Springer, 1997.
- Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D. *Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls*. Mimeo. jul/1999.
- Galambos, J. *The asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*. New York: John Wiley & Sons, 1978.
- Jorion, P. *Value-at-risk the new benchmark for managing financial risk*. New York: McGraw-Hill, 2nd edition, 2000.
- Kellezi E. , Gilli., M. *Extreme value theory for tail related measures*. Working paper, University of Geneva, abr/2000. <http://www.gloriamundi.org>.
- Longin, F. M. , Solnik, B. Extreme correlation of international equity markets. *The Journal of Finance*, 2(LVI):649--676, abr/2001.
- Longin, F. M. , Solnik, B. *The correlation structure of international equity markets in extremely volatile periods*. Cahier de Recherche 646, Groupe HEC, nov/1999.
- Longin, F. M. From value at risk to stress testing: the extreme value approach. *Journal of Banking & Finance*, 24:1097-1130, 2000.
- Longin, F. M. *Stress testing: a method based on extreme value theory*. Research paper, BSI GAMMA Foundation, Junho 1999. <http://www.bsi.ch>.
- McNeil, A. J. *Extreme value theory for risk managers*. In Embrechts, P. (editor). *Extremes and integrated risk management*. London: Risk Books, 2000.
- Panzieri, A. *Teoria de Valores Extremos Aplicada a Finanças: dois ensaios*. Tese de doutoramento. EAESP/FGV: São Paulo, 2001.
- Reiss, R. D. , Thomas, M. *Statistical Analysis of Extreme Values*. Berlin: Birkhauser , 2001.
- Resnick, S. I. *Extreme Values, Regular Variation and Weak Convergence*. New York: Springer-Verlag, 1987.
- RiskMetrics Group. *Riskmetrics technical document*. Technical report, RiskMetrics Group, 1996. <http://www.riskmetrics.com/research/techdocs>.

---

<sup>i</sup>  $x_F$  é o menor valor onde F alcança 1, caso  $x_F$  seja finito, e que  $F(x) < 1$  para todo x caso  $x_F = \infty$ .

<sup>ii</sup> Para a cauda esquerda basta inverter os sinais da amostra.

<sup>iii</sup> Chamamos a atenção do leitor para notar que as perdas de um ativo financeiro podem ser causadas tanto por retornos negativos do ativo (aqueles presentes na cauda esquerda da função de distribuição), caso se detenha uma posição longa nesse ativo, quanto por retornos positivos (presentes na cauda direita da função de distribuição), se a posição for curta nesse ativo.

<sup>iv</sup> Vale notar que, para simplificar a notação, não indexamos  $\lambda$  às posições dos ativos.

<sup>v</sup> É importante notar que, de acordo com a convenção adotada neste trabalho, um mesmo valor de  $\alpha$  tem significado diferente dependendo se ele se refere a posições longas (ll) nos dois ativos ou a posições curtas nos dois ativos (ss). Por exemplo,  $\lambda^{ll}$  para  $\alpha = 0,95$  indica a dependência entre as estimativas de retornos que, em cada ativo, são **inferiores** a 95% das demais estimativas de retorno daquele mesmo ativo. Já  $\lambda^{ss}$  para  $\alpha = 0,95$  indica a dependência entre as estimativas de retornos que, em cada ativo, são **superiores** a 95% das demais estimativas de retorno daquele mesmo ativo. Desta forma, os valores crescentes de  $\alpha$  associados a posições longas nos dois ativos irão indicar situações de crise mais extremas, enquanto valores crescentes de  $\alpha$  associados a posições curtas nos dois ativos indicarão situações de euforia mais extremas.

<sup>vi</sup> Se os retornos fossem dois componentes de um processo normal multivariado então os retornos excedentes de todas as variáveis tenderiam a ser independentes conforme o limiar usado para definir as caudas tendesse ao extremo das distribuições dos retornos.