

Eficiência no Mercado de Ações Latino-Americano: contribuição da teoria do caos

Autoria: Paulo Sergio Ceretta

Resumo

Este artigo teve como objetivo investigar a possível presença de comportamento caótico nas variações de preço nos mercados de ações de cinco países da América Latina, Argentina, Brasil, Chile, México e Peru. A metodologia de investigação envolveu a aplicação do teste *close returns*, tanto no enfoque qualitativo, quanto no enfoque quantitativo. Deve-se ressaltar que a presença de comportamento caótico nas variações de preços dos índices de mercado corroboraria para com a Hipótese de Mercados Eficientes, pois seria aceitável a presença de certos padrões nas variações de preços sem que isso tornasse possível a previsibilidade no seu comportamento futuro, possibilitando a investidores, detentores de certas informações, a construção de estratégias com ganhos anormais. Os resultados obtidos pelo enfoque quantitativo do teste rejeitam a hipótese de haver indícios certo grau de dependência não-linear complexa nas variações dos índices de mercado.

Palavras-Chave: Mercado de ações, caos, dinâmica não-linear, *close returns*, complexidade.

Introdução

A Hipótese de Mercados Eficientes, do inglês *Efficient Market Hypothesis* – EMH, inicialmente formulada por Samuelson (1965), é uma teoria de equilíbrio aplicada ao mercado financeiro que, por exemplo, permite afirmar, em termos gerais, que quanto maior for o risco de um investimento maior deverá ser a expectativa de recompensa ao investidor avesso ao risco. Estando o mercado em equilíbrio, um investidor só conseguirá obter vantagem sobre outro se possuir informações úteis que ainda não estejam refletidas no comportamento dos preços. Porém, sob a hipótese do mercado eficiente, as informações estão disponíveis publicamente e, por esta razão, seus detentores não possuem vantagem na estruturação de estratégias de negociação que lhes possibilitem obter lucros anormais.

A literatura de finanças é farta em termos de investigações empíricas e, também, em termos de estruturas teóricas de modelos estatísticos direcionados a desvendar particularidades da EMH. Parte significativa das investigações à respeito da EMH são relacionadas diretamente a possibilidade de previsão nas variações dos preços das ações. Embora a EMH seja mais ampla do que um simples modelo estatístico de previsibilidade, não se pode negar que a imprevisibilidade nas variações dos preços contribui em muito para sua sustentação. Nesse sentido, o modelo de caminho aleatório com resíduos não-correlacionados mas não necessariamente identicamente distribuídos (versão mais ampla descrita por Campbell, Lo e Mackinlay 1997) tem sido o mais testado que se refere a dependência linear.

Por outro lado, como destaca Ceretta (2002), investigações sobre a existência de dependência não-linear nas variações de preço estão se tornando mais representativas. O crescimento das investigações sobre previsibilidade nos mercados financeiros, através de modelos não-lineares, está diretamente associado ao desenvolvimento da teoria sobre a heteroscedasticidade condicional autoregressiva (amplamente difundida pelas siglas ARCH, GARCH e suas extensões) e pelo desenvolvimento da teoria do caos. Testes estatísticos lineares não são capazes de detectar anomalias de dependência nas variações de preços se

estas forem do tipo não-linear. É necessário enfatizar que a dependência não-linear não significa necessariamente comportamento caótico, mas caos é, necessariamente, um comportamento não-linear.

Este estudo tem por objetivo investigar possíveis evidências de comportamento caótico nos mercados de ações da Argentina, Brasil, Chile, México e Peru. Precisamente, são investigados as variações dos índices de preços semanais representativos dos cinco países no período entre 29/05/1994 e 04/01/2002. A motivação básica para o desenvolvimento deste estudo é de contribuir com a literatura especializada na discussão da Hipótese de Mercados Eficientes sob a ótica da dependência não-linear caótica. Após esta breve introdução, o artigo está estruturado em sete seções. A seguir é apresentada uma definição conceitual de caos; na segunda seção é desenvolvido uma breve evolução histórica sobre a origem da dinâmica não-linear complexa; na terceira são descritos alguns estudos sobre previsibilidade e sua aplicação no mercado de ações; na quarta seção é descrito o teste utilizado para detectar comportamento caótico; na quinta seção são discutidos alguns aspectos metodológicos; na sexta seção, são apresentados os resultados empíricos e, por último, é realizada a conclusão do estudo.

Definição de Caos

A teoria do caos é uma disciplina científica em desenvolvimento, focalizada no estudo dos sistemas não-lineares complexos, cujas fronteiras não estão bem definidas. Portanto, o entendimento do caos está intrinsicamente relacionado com o entendimento de três termos básicos: sistemas, não-linearidade e complexidade. O termo sistema é uma relação de interdependência e inter-relacionamento entre partes. Um exemplo clássico, apresentado por Ruelle (1991), é uma pilha de pedras. A inter-relação e a interdependência são vistas com mais facilidade quando se retira uma pedra da base, provocando um desmoronamento da pilha. O desmoronamento nada mais é do que uma reorganização na busca de um novo estado de equilíbrio. Naturalmente, o sistema é dinâmico, ou seja, a cada nova alteração na base, a pilha de pedra se reorganizará, procurando manter-se em equilíbrio.

O segundo termo, não-linearidade, está relacionado à estrutura matemática utilizada para representar o comportamento do sistema real. Um modelo linear constitui-se na tentativa de estabelecer uma relação de proporcionalidade constante entre variáveis, ou seja, a mudança em uma variável causará uma alteração proporcional em outra variável e essa alteração pode ser representada por uma linha reta. Por outro lado, a não-linearidade significa ausência de proporcionalidade constante. Desse modo, a mudança em uma variável deverá produzir alterações não proporcionais em outra variável. No modelo não-linear, a melhor maneira de se identificar o relacionamento entre variáveis não é uma linha reta, mas sim, opções curvilíneas.

O terceiro termo, complexidade, está relacionado com a dificuldade de se estruturar um modelo para prever o comportamento de um sistema real. Por exemplo, é pouco complexo prever o tempo necessário para se deslocar da cidade (A) para a cidade (B); salvo a interferência maligna do destino, o tempo necessário é dado pela razão entre a distância e a velocidade de deslocamento ($t = d/v$). Observa-se que uma parada para abastecimento ou uma possível troca de pneu, pode ser administrada e não causará uma grande distorção entre o tempo estimado e o tempo real.

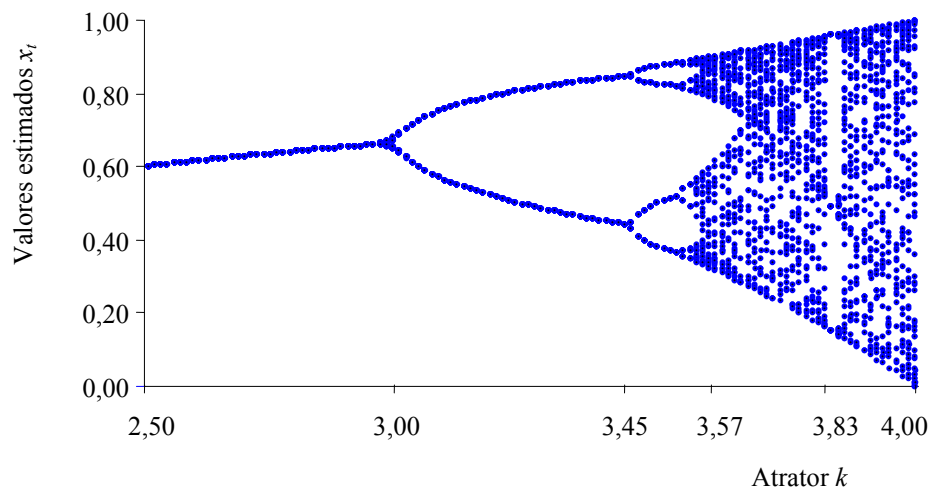
Por outro lado, conforme o exemplo de Ruelle (1991), nada simples é a tentativa de prever o comportamento de uma pilha de pedras desmoronando. Nesse caso, será necessário obter

informações detalhadas sobre a forma de cada pedra, seus pesos, medidas, locais em que estão inseridas na pilha, a interdependência e a inter-relação que cada pedra sofrerá e exercerá sobre as demais devido aos atritos. Mesmo assim, se for desprezado um simples grão de pedra por mais pequeno que seja, o resultado da predição será muito diferente do sistema real. Grande dependência a condições iniciais é uma das características dos sistemas complexos.

Após essas considerações, verifica-se que caos é um fenômeno onde mecanismos dinâmicos, simples e determinísticos produzem efeitos ao longo do tempo tão complicados que o tornarão imune frente à maioria dos testes de previsibilidade. Stewart (1988) definiu caos como um comportamento aparentemente estocástico que ocorre num sistema determinístico. Segundo sua descrição, muitas séries temporais de dados, inicialmente considerados de comportamento aleatório, podem apresentar padrões determinísticos. Um dos aspectos fundamentais do caos é a hiper-sensibilidade a condições iniciais, ou seja, o resultado da previsão, para um sistema, é muito sensível ao estado inicial desse sistema.

A Figura 1 ilustra a dinâmica que ocorre com valores estimados sob efeitos de pequenas alterações no valor de um parâmetro da equação logística $x_t = kx_{t-1}(1-x_{t-1})$. Para cada um dos valores do parâmetro $2,50 \leq k \leq 4,00$, foram realizadas 50 iterações que foram distribuídas sobre o eixo vertical. Observa-se que, quando $2,50 \leq k < 3,00$, o sistema é estável atraindo os valores estimados para uma região específica. Quando $k = 3,00$ ocorre uma bifurcação e os valores estimados começam a oscilar de forma regular em duas regiões. Quando $k = 3,45$, ocorrem mais duas bifurcações e os valores estimados oscilam regularmente em quatro regiões. Porém, quando $k = 3,57$, o sistema é caótico, instável e os valores estimados oscilam de maneira irregular em diversas regiões.

Figura 1. Diagrama de bifurcação



Ainda, a respeito da Figura 1, é necessário fazer uma importante observação. Existem regiões no diagrama de bifurcação, para valores de $k > 3,57$, em que o sistema não é caótico. Mais precisamente, quando $k = 3,83$ os valores estimados são atraídos para apenas três regiões regulares. Portanto, para valores de $3,57 \leq k \leq 4,00$, existem intervalos onde uma pequena variação no valor de k torna um sistema ordenado em um sistema desordenado e vice-versa.

Após essa breve apresentação, é necessário enfatizar que um sistema caótico é um sistema determinístico, ou seja, tem seu comportamento determinado por algum tipo de equação diferencial determinística. Desse modo, a evolução de um sistema caótico não apresenta desordem absoluta, mas sim, uma determinada ordem que, devido a sua hipersensibilidade a condições iniciais e de sua estrutura não-linear e complexa, é praticamente imprevisível a longo prazo, independente de se obter uma equação com parâmetros altamente significativos que se ajuste aos dados.

Determinismo e Caos

Um dos paradigmas da ciência até o início do século 20 foi o determinismo, ou seja, a preocupação com uma completa descrição dos sistemas através de um conjunto de equações de maneira a predeterminar o seu comportamento. Essa idéia é a base do que se chama hoje de mecânica clássica ou newtoniana, em homenagem a seu célebre expoente Isaac Newton. Segundo Newton (1687), conhecendo-se o estado de um sistema num instante inicial e sua variação entre dois instantes quaisquer, pode-se determinar seu estado em qualquer outro instante no futuro. Em outras palavras, se a posição e a velocidade de um objeto podem ser medidas, então sua posição futura pode ser determinada.

A obra de Newton, em mecânica, baseada nas suas três famosas leis, Lei da inércia, Lei da força e Lei da ação e reação, foi o fundamento do determinismo laplaciano. Segundo Laplace (1814) não há lugar para o acaso, tanto os maiores quanto os menores corpos do universo podem ter seus movimentos modelados pelas equações. Assim, em certo grau, se for possível conhecer posição e velocidades de uma partícula em um determinado momento então, pode-se determinar suas posição e velocidade em qualquer outro momento, tanto no passado quanto no futuro.

Embora a idéia de Newton, pré-determinar o futuro, possa parecer extravagante, foi considerada muito avançada frente as idéias até então em evidência. Por exemplo, frente as idéias de Descartes, em torno do ano de 1637. Os cartesianos, discípulos de Descartes, consideravam irracional a idéia de que existiam forças de atração à distância entre corpos, para eles a explicação deveria ser mais mecanicista como uma engrenagem e nada de forças à distância. Mais tarde, com a publicação do princípio da incerteza, o físico Heisenberger (1927) reduz o impacto das idéias de Newton. Segundo o princípio da incerteza de Heisenberger, quanto mais se tenta medir a posição de uma partícula, menos exatamente se consegue medir a sua velocidade e vice-versa, isso influencia diretamente a previsibilidade de qualquer sistema.

Ruelle (1991) cita que, na prática, nunca é perfeitamente conhecido o estado de um sistema no instante inicial. Assim, sempre existirá um pouco de acaso que, no longo prazo, se manifestará na forma de uma grande distorção nos resultados. De fato, essa idéia não, foi primeiramente demonstrada pelo matemático francês Hadamard (1898), apoiado posteriormente pelas demonstrações do físico Duhem (1906). Para um melhor entendimento da demonstração de Hadamard sobre a dependência hipersensível das condições iniciais, é necessário recorrer a um exemplo sobre um jogo de bilhar descrito por Ruelle (1991).

No exemplo do jogo de bilhar, uma bola (A) é colocada em movimento na direção de outra bola (B). Depois de várias colisões com várias outras bolas e contra as bordas da mesa, a bola (A) estaciona num lugar específico sobre a mesa. Observe-se que, se a bola (A) fosse

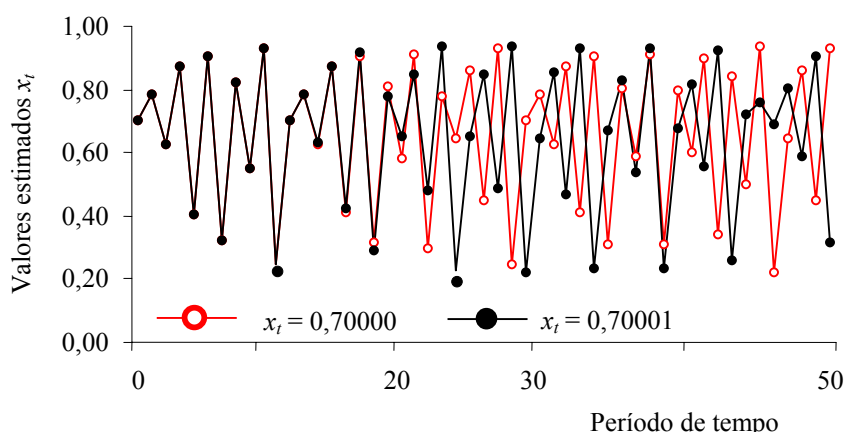
colocada em movimento com uma ínfima diferença no ângulo de deslocamento na direção à bola (B), após várias colisões, realizaria outro percurso e estacionaria num lugar totalmente diferente do anterior. Portanto, a ínfima diferença na medida do ângulo do deslocamento da bola (A) perturba totalmente o resultado final.

O matemático e filósofo francês Poincaré (1908) analisou a influência que dois grandes corpos exerciam sobre uma pequena partícula. A idéia era de que a partícula teria sua trajetória influenciada pela atração dos grandes corpos. Poincaré relatou que uma pequena alteração na posição inicial da partícula em relação aos corpos conduz a um resultado completamente diferente; salientou, ainda, que um pequeno erro inicial resultará num enorme erro no futuro e isso torna as previsões impossíveis, portanto, tem-se um fenômeno fortuito.

Segundo Poincaré (1908) um campo que merece destaque está relacionado aos fenômenos meteorológicos. Para Poincaré, na meteorologia existe uma grande dependência a condições de um estado inicial. O fato de que o estado inicial não é conhecido com exatidão torna as previsões meteorológicas com mais de uma ou duas semanas de antecedência cercadas de pouca confiabilidade. O fato de se descobrir que não é possível realizar previsões meteorológicas a longo prazo favorece a atribuição dos fenômenos ao acaso e isso não deve ser confundido com tendências das estações do ano.

O meteorologista Lorenz (1963), em seu estudo sobre o comportamento de alguns fenômenos atmosféricos, acabou por fornecer um exemplo prático de dependência hipersensível a condições iniciais ou de erros das medidas. Numa de suas várias simulações, por uma questão de economia de papel e de tempo, Lorenz utilizou apenas três casas decimais ao invés do número completo, ou seja, para a observação 0,765127 ele digitou apenas 0,765. O resultado da simulação com apenas três casas decimais divergiu drasticamente do resultado obtido com os valores originais. A Figura 2 ilustra um exemplo semelhante, onde é realizada uma simulação com o valor inicial de $x_t = 0,70000$ e, após, outra simulação com o valor correto 0,70001. A simulação é realizada com a equação logística $x_t = 3,75x_{t-1}(1 - x_{t-1})$.

Figura 2. Hipersensibilidade a condições iniciais



Quando plotadas conjuntamente num gráfico, a simulação com os valores originais e a simulação com os valores arredondados formaram uma imagem semelhante ao bater de asas de uma borboleta, pois as duas simulações tinham traçados diferentes. Essa imagem ficou conhecida como efeito borboleta. Segundo Stewart (1988), o efeito de um bater de asas de

uma borboleta hoje, produz uma ínfima mudança no estado da atmosfera e, com o passar do tempo, essa mudança poderá tanto provocar um tornado, quanto evitar que um aconteça. Essa passou a ser uma das características mais marcantes de sistemas caóticos, a dependência hipersensível às condições iniciais.

Previsibilidade nos Mercados de Ações

O modelo básico de imprevisibilidade nas variações de preços no mercado de ações é amplamente conhecido como caminho aleatório e foi desenvolvido pelo matemático Bachelier (1900), quando elaborou sua tese de doutorado. Embora a tese de Bachelier não tenha sido muito notada quando de sua publicação, o suporte matemático que acompanhava a teoria do processo aleatório acabou por antecipar por cinco anos um famoso trabalho de Einstein (1905) sobre o movimento aleatório originário da colisão de moléculas de gás. O trabalho de Einstein consistiu na descoberta da equação que descreve o fenômeno do movimento molecular aleatório, também conhecido como movimento browniano, ou processo de *wiener*, que é exatamente a equação desenvolvida por Bachelier para descrever o comportamento dos preços dos ativos financeiros.

O movimento browniano foi descrito pela primeira vez pelo botânico Brown (1827), ao observar que o pólen de diversas plantas dispersava-se na água sob a forma de um grande número de partículas em direções não tendenciosas, porém com características específicas das ciências físicas. O primeiro tratamento matemático rigoroso do movimento browniano foi, então, atribuído ("por desconhecimento do estudo de Bachelier") ao trabalho posterior de Einstein (1905) e Wiener (1923). Com o trabalho de Bachelier ainda caído no esquecimento, o estatístico Maurice Kendall acabou por ganhar os créditos de chamar a atenção dos economistas para o modelo de caminho aleatório. Kendall (1953) analisou o comportamento das variações dos preços de índices de ações e de mercadorias na Bolsa de Valores de Londres, quando concluiu serem estas variações completamente aleatórias, ou seja, não havia qualquer informação nos retornos históricos dos preços que ajudasse a prever o seu comportamento futuro ou a identificar regularidades ou sazonalidades. Portanto, os preços seguiam um caminho aleatório.

Samuelson (1965) procurou sintetizar uma idéia sobre o comportamento das flutuações dos preços em seu artigo *Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly*. Sua idéia é de que, num mercado informacionalmente eficiente, os preços mudam, mas são imprevisíveis, e isso só é válido desde que eles incorporem as expectativas e informações de todos os participantes do mercado. Em outras palavras, se não existirem barreiras à informação nem custos de transação, a variação de preços para o próximo período será reflexo da informação para esse período, e sendo essa informação imprevisível, as variações nos preços também seguirão o mesmo caminho.

Após a teoria da Hipótese de Mercado Eficiente ter sido introduzida por Samuelson, em 1965, dois outros autores contribuíram em muito para o seu desenvolvimento. Mais precisamente são os estudos de Roberts (1967) e Fama (1970) que dispenderam esforços na distinção entre três formas de eficiência. Segundo os conceitos desses autores, a eficiência de mercado pode ser classificada como: i) eficiência na forma fraca; ii) eficiência na forma semiforte, e iii) eficiência na forma forte. A classificação proposta pelos autores está diretamente associada a diferentes tipos de informação, ou seja, eficiência informacional.

O mercado é eficiente na forma fraca se os preços das ações já refletem todas as informações que podem estar contidas nas suas séries históricas. Portanto, sob esta hipótese, o estudo do comportamento histórico das taxas de retorno das ações em nada poderá contribuir para a definição de estratégias de negociação que possam garantir retornos anormais. A eficiência na forma semiforte presume que toda informação pública, disponível para avaliação, esteja incorporada nos preços. Esse conceito engloba, além das séries históricas dos preços, as demonstrações financeiras, planos operacionais e mercadológicos publicamente disponíveis para avaliação. A eficiência na forma forte se estende muito além de um simples modelo de caminho aleatório. Presume-se que os preços das ações reflitam tanto informações disponíveis, quanto informações privilegiadas, não disponíveis a todos os investidores (*inside information*). A forma forte de eficiência é um caso extremo em que a posse de informação privilegiada não seria útil para a definição de estratégias de negociação que possam garantir retornos anormais, pois tais informações já estariam refletidas nos preços dos títulos.

No período de 1900 até 1970, a maioria dos estudos deram suporte à hipótese de que o processo de formação dos preços das ações segue um caminho aleatório. Porém, sua validade voltou a ser discutida a partir da publicação de inúmeros estudos que procuravam identificar anomalias temporais nas variações dos preços. Mesmo sendo significativas do ponto de vista estatístico, as anomalias temporais não conseguiram abalar a solidez dos estudos iniciais sobre caminho aleatório e eficiência de mercado. A principal alegação é de que elas não apresentam evidências de persistirem após terem sido descobertas. Esse é o caso do estudo de Costa Jr. (1990), que investigou o mercado brasileiro e identificou que as variações médias nos dias próximos ao início da semana são inferiores às variações dos dias próximos ao final da semana. Mas em estudo posterior, Ceretta e Costa Jr. (1999) não mais constataram essa diferença.

A hipótese de que as variações dos preços seguem um caminho aleatório é novamente questionada e sofre um forte abalo com a publicação de três artigos clássicos em Finanças dos autores Lo e Mackinlay (1988), Fama e French (1988) e Poterba e Summers (1988). Lo e Mackinlay (1988) utilizaram dados semanais do mercado americano e acharam evidências de autocorrelação positiva nos retornos, particularmente em *portfolios* formados com ações de pequenas empresas. Fama e French (1988), usando retornos mensais, evidenciaram a existência de autocorrelação serial negativa em períodos longos no mercado americano. Eles afirmaram que de 25 a 40% das variações dos retornos de longo prazo podem ser previsíveis a partir de retornos passados. Por sua vez, Poterba e Summers (1988) utilizaram o teste de quociente de variância para os mercados de ações desenvolvidos e obtiveram indícios de que eles exibem autocorrelação positiva no curto prazo e autocorrelação negativa no longo prazo, tanto no mercado americano, quanto em outros mercados desenvolvidos.

Teste para Detectar Caos no Mercado Financeiro

A idéia da imprevisibilidade no mercado de ações tem como base o modelo de caminho aleatório. Assim, a melhor previsão para o preço de amanhã é o preço de hoje, ou seja, $E_t(x_{t+1} | \mathcal{Q}) = x_t$, onde \mathcal{Q} é o conjunto de informações no tempo t que já está refletido no preço. É comum o modelo de caminho aleatório ser escrito na forma $x_{t+1} = x_t + \varepsilon_t$, onde ε_t é a variação que ocorre no preço de um período para outro. Sob a hipótese do caminho aleatório, ε_t ($t = 1, \dots, n$) é imprevisível dado um conjunto de informações \mathcal{Q} , pois o preço já reflete todo o conjunto de informações disponíveis. A imprevisibilidade das variações de preço, no sentido

de não possibilitar a formulação de estratégias de negociação que assegurem lucros acima do normal, é conhecida como Hipótese de Mercados Eficientes. A maioria dos testes para caminho aleatório são baseados em modelos lineares.

Por outro lado, um sistema caótico é um sistema não-previsível para o longo prazo, embora seja determinista e possa ser um pouco previsível em curtos intervalos de tempo. Sob a hipótese de caos a previsibilidade se deteriora exponencialmente com os aumentos dos intervalos de tempo. Sistemas caóticos também têm uma memória muito curta para um pequeno histórico de seu passado. Como consequência, a estatística padrão, utilizada nos testes de caminho aleatório, não pode ser utilizada para verificar se uma série de tempo é caótica, mas pode ser utilizada para rejeitar a hipótese nula de que a série seja independente e identicamente distribuída (i.i.d.).

Rejeitar a hipótese nula i.i.d., em dados pré-filtrados de dependência linear, não significa aceitar a hipótese alternativa de comportamento caótico. Esse é o caso do mais famoso teste para detectar estruturas não-lineares, o teste BDS, desenvolvido por Brock, Dechert e Scheinkman (1987). O teste BDS é baseado na correlação dimensional sugerida por Grassberger e Procaccia (1983). O teste BDS é indicado apenas para investigar evidências sobre a dependência não-linear e essa é uma condição necessária, mas não suficiente para caos. Essa questão é discutida de forma exaustiva em Barnett et al. (1998).

Atualmente, são muitos os *softwares* disponíveis para identificar caos em uma série de dados. Um dos limitantes para o uso desses *softwares* é a necessidade de se ter um certo domínio dos termos técnicos e do conhecimento da área da Física. Porém, Gilmore (1993) apresentou um teste para detectar caos, denominado de *close returns*. O teste *close returns* é um teste simples, de fácil aplicação e que não requer de seu usuário prévios conhecimentos da área da Física. O teste *close returns* foi desenvolvido com base na formulação topológica do caos descrita por Tufillaro et al. (1990), Mindlin e Gilmore (1992) e, mais recentemente, por Gilmore (1998). É um teste de duplo enfoque, tanto qualitativo quanto quantitativo. Enquanto que o teste BDS procura detectar um possível afastamento da hipótese i.i.d., o teste *close returns* foi estruturado para capturar estruturas caóticas que, notadamente, apresentam órbitas periódicas instáveis.

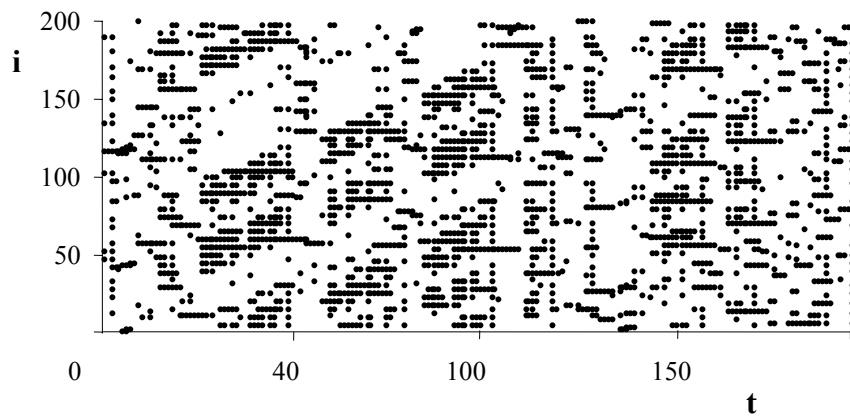
A idéia básica do teste *close returns* é identificar a existência de órbitas periódicas instáveis em várias dimensões, que são atribuídas aos atratores estranhos. Nesse ponto é importante salientar algo sobre os atratores estranhos. Segundo Ruelle (1991), os atratores estranhos não são curvas ou superfícies lisas, mas objetos de dimensões não inteiras que Mandelbrot (1977) designou de *fractais*. Desse modo, uma linha reta tem um *fractal* de 1,0, um quadrado 2,0 e um cubo 3,0. Segundo Larrain (1991), o gráfico da evolução dos preços das ações deverá ter um *fractal* entre 1,3 a 1,4. Segundo Gilmore (1998) a formulação topológica do caos, base do teste *close returns*, procura evidências de caos no comportamento recursivo de uma série de tempo. Para uma série caótica, espera-se que seu comportamento recursivo esteja perto de uma determinada órbita periódica instável, devendo ser repelida ou atraída para outras regiões conforme a ação do atrator estranho. Deve ficar claro que uma órbita periódica instável não é estática, logo, nunca se reproduzirá perfeitamente.

Para uma série caótica $\{x_t\}$, onde $t = 1, \dots, n$, espera-se que qualquer observação específica ocorra perto de uma órbita periódica, desse modo, observações subsequentes deverão aparecer por perto da série depois de um intervalo de tempo i , onde $i = 1, \dots, n-1$. Portanto, conforme Gilmore (1993), a diferença entre x_t e x_{t+i} deverá ser muito pequena e, por consequência, x_{t+i}

deverá estar próximo de x_{t+1+i} e, x_{t+2} perto de x_{t+2+i} . A essência do teste *close returns* é, justamente, identificar segmentos nos dados onde a diferença $|x_t - x_{t+i}|$ seja muito pequena.

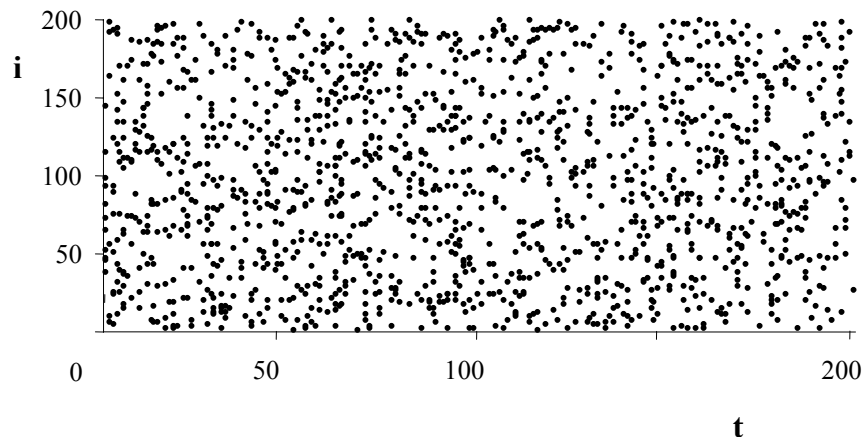
A identificação dos *close returns* em uma série de dados é realizada pelo cálculo de todas as diferenças $|x_t - x_{t+i}|$. Após, deve-se verificar se essas diferenças são muito pequenas comparando-as com um valor limite ε . Segundo Gilmore (1993), o valor de ε é um pequeno percentual da maior diferença entre quaisquer dois valores do conjunto de dados, geralmente de 2 a 5% dessa diferença. Essas informações são, então, colocadas em forma de gráfico. Assim, se $\varepsilon > |x_t - x_{t+i}|$, o resultado será um ponto preto (•) no gráfico, e um ponto branco () para os demais casos. A Figura 3 ilustra o gráfico dos *close returns* para uma série caótica.

Figura 3. *Close returns* para uma série caótica



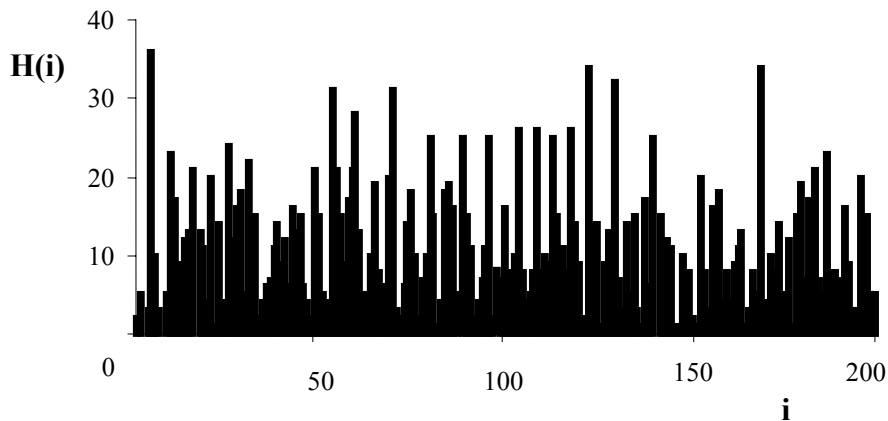
O enfoque qualitativo do teste se dá pela observação visual do gráfico dos *close returns*. A Figura 3 tem representado no eixo horizontal os valores de t observações e no eixo vertical os valores de i . Nesse caso específico, a figura representa um *box-plot* 200x200 de uma série caótica gerada por uma equação logística $x_t = kx_{t-1}(1 - x_{t-1})$, onde $k = 3,75$ é o atrator estranho e x é uma variável, tal que $0 < x < 1$. Observa-se que agrupamentos de *close returns* aparecem como segmentos de linha horizontais que indicam a existência de órbitas periódicas instáveis. Em contraste, a Figura 4 apresenta a distribuição dos *close returns* para uma série aleatória.

Figura 4. *Close returns* para uma série aleatória



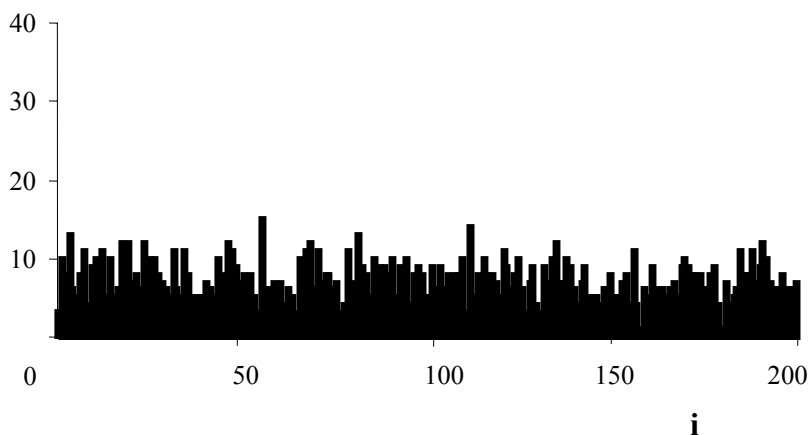
Se a série temporal apresentar comportamento aleatório, os *close returns* deverão estar distribuídos de forma aleatória, exibindo uma dispersão uniforme sem a definição de segmentos de linha horizontais. Esse é o caso ilustrado pela Figura 4, onde são apresentados os *close returns* de uma série aleatória gerada com o auxílio da planilha do Excel. O enfoque quantitativo do teste *close returns* é desenvolvido tendo por base a construção de um histograma que registra a incidência dos pontos pretos. A Figura 5 ilustra um histograma para os pontos pretos da Figura 3. O histograma tem sobre o eixo horizontal os valores de i , e sobre o eixo vertical os valores de $H(i)$, onde $H(i) = \sum \Theta(\epsilon - |x_t - x_{t-i}|)$; Θ é a função *heaviside* tal que $\Theta(x) = 1$ se $x \geq 0$ e $\Theta(x) = 0$ se $x < 0$.

Figura 5. Histograma de frequência dos *close returns* de uma série caótica



Para dados caóticos, o histograma de frequência dos *close returns* deverá evidenciar claramente a existência de uma série de picos, valores de $H(i)$ muito superiores a seu valor médio. Esse fenômeno é bem evidenciado na Figura 5. Em contraste, uma série de valores aleatórios deverá apresentar um histograma com valores de $H(i)$ distribuídos de maneira uniforme como ilustrado pela Figura 6.

Figura 6. Histograma de frequência dos *close returns* de uma série aleatória



As Figuras 5 e 6 estão na mesma escala de valores de modo a facilitarem a identificação das significativas diferenças entre ambas. A Figura 5, série caótica, apresenta valores de $H(i)$ entre 0 e 36, que estão bem dispersos em relação ao valor médio de 6,70. Por outro lado, a

Figura 6 apresenta os valores de $H(i)$ entre 1 e 16, bem concentrados em torno de um valor médio de 7,14.

A verificação estatística da hipótese de que $H(i) = \bar{H}$, é realizada pela aplicação do teste qui-quadrado. Se a série é i.i.d., o valor do teste qui-quadrado calculado deverá ser inferior ao qui-quadrado tabelado. Caso contrário, fica evidenciada alguma dependência não-linear na série temporal. No exemplo anterior, para a série caótica, o teste qui-quadrado foi de 1.170, bem superior ao valor tabelado de 232,91. Para a série aleatória, o qui-quadrado calculado foi de 178, abaixo do valor crítico. Para ambos os casos, considerou-se $i-1$ graus de liberdade, onde $i = 200$.

Aspectos Metodológicos e Dados

A pesquisa está direcionada para o mercado de ações como um todo e não sobre seus componentes. Em outras palavras, o estudo assume que os índices Merval (Argentina), Ibovespa (Brasil), Igpa (Chile), Inmex (México) e Igbvl (Peru) são representativos das ações negociadas nos seus respectivos países. Os dados utilizados foram obtidos junto ao banco de dados da Economática e abrange o período de 29/05/1994 e 04/01/2002, totalizando 401 observações semanais das variações dos preços de fechamento tomados seus valores em dólares americanos. A Tabela 1 apresenta a estatística descritiva das variações dos índices de preço para os cinco países.

Tabela 1. Estatística descritiva das variações semanais dos preços dos índices de mercado*

Estatística	Valor do teste χ^2 calculado				
	Argentina	Brasil	Chile	México	Peru
Média	0,02	0,33	-0,01	0,11	-0,03
Desvio Padrão	5,30	6,29	2,51	5,51	3,35
Assimetria	0,47	0,17	-0,09	-0,46	0,77
Excesso de Curtose	3,04	1,51	2,06	4,55	4,89
Máximo	26,83	24,13	9,54	25,33	19,14
Mínimo	-16,11	-22,30	-10,77	-33,85	-11,85

* As variações dos preços foram calculadas aplicando-se a fórmula $(p_t - p_{t-1}) / p_{t-1}$.

Os retornos em dólares foram considerados para possibilitarem futuras comparações com os mercados internacionais, em termos de investidores globais, para o quais os valores em moeda local têm um significado menos expressivo. Observando-se os valores na Tabela 1, pode-se constatar que o mercado de ações do Brasil foi o que se apresentou como o mais receptivo aos investidores, recompensando-os com uma maior remuneração por unidade de risco, mais precisamente 0,052 (0,33 / 6,29) seguido pelos mercados do México e da Argentina. Na contramão, os mercados do Peru e do Chile impuseram perdas aos seus investidores.

Os coeficientes de assimetria e excesso de curtose fornecem informações importantes. O excesso de curtose em relação a uma distribuição normal caracteriza uma curva de distribuição de frequência mais achatada do que a curva de uma distribuição normal. A assimetria caracteriza o formato da extensão da cauda da distribuição de frequência, observa-se que a assimetria tende a oscilar. Para os mercados da Argentina, Brasil e do Peru a curva de distribuição de frequência se estende mais para a direita, para os mercados do Chile e do México ela se estende mais para a esquerda.

Para verificar a existência de comportamento caótico no mercado de ações, foi aplicado o teste qui-quadrado nos histogramas de frequência gerados pelos *close returns* do índice de mercado dos cinco países, valores tomados em dólar. Deve-se resaltar que o teste é aplicado nos *box-plots*. O *box-plot* é um intervalo bidimensional de $(t)x(i)$ observações. Nesse caso H_i e sua média são estimados para cada *box* de tamanho $(t)x(i)$ onde $t = i = 20, 30, 40, 50$ e 200 . Os valores do teste qui-quadrado calculados são comparados com os valores tabelados para os respectivos graus de liberdade. Essa abordagem evita possível enviesamento dos resultados atribuído a um único tamanho de *box-plot*.

Resultados Empíricos

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos pela aplicação do teste *close returns* nas séries temporais dos índices Merval (Argentina), Ibovespa (Brasil), Igpa (Chile), Inmex (México) e Igbvl (Peru) tomados em dólar. Na Tabela 2 está disposto um resumo do teste qui-quadrado para os histogramas de frequência dos *close returns* dos índices. A primeira coluna identifica a extensão do *box-plot* analisado e a segunda coluna, os valores tabelados do teste qui-quadrado a 5%. As demais colunas são destinadas aos valores do teste qui-quadrado calculado em cada um dos índices de mercado. Os resultados do enfoque quantitativo do teste *close returns* rejeitam amplamente a hipótese de haver idnícios de dependência temporal não-linear complexa nas variações dos índices de mercado.

Tabela 2. Teste Qui-quadrado (χ^2) para os histogramas de frequência dos *close returns*

Tamanho do box-plot	Teste χ^2 tabelado*	Valor do teste χ^2 calculado				
		Argentina	Brasil	Chile	México	Peru
20x20	30,10	17,00	17,00	14,00	13,00	19,89
30x30	42,60	23,00	24,00	24,57	40,00	29,00
40x40	54,54	30,91	36,27	37,84	45,50	44,77
50x50	66,29	41,69	38,52	57,71	56,19	47,22
100x100	123,23	101,24	85,05	113,62	102,66	103,58
200x200	232,91	181,29	185,84	190,88	166,11	213,05

* Teste qui-quadrado é dado por $\chi^2 = \sum[(f_o - f_e)^2/f_e]$, onde f_o é a frequência observada e f_e é a frequência esperada. Para dados caóticos, espera-se que $\chi^2_{\text{calculado}} > \chi^2_{\text{tabelado}}$.

A seguir, as Figuras 7, 8,9,10 e 11 ilustram graficamente a abordagem qualitativa do teste *close returns* para cada um dos índices de mercado. O lado esquerdo é destinado ao histograma de frequência e o lado direito ao plot dos *close returns*.

Figura 7. Representação gráfica dos *close returns* da Argentina

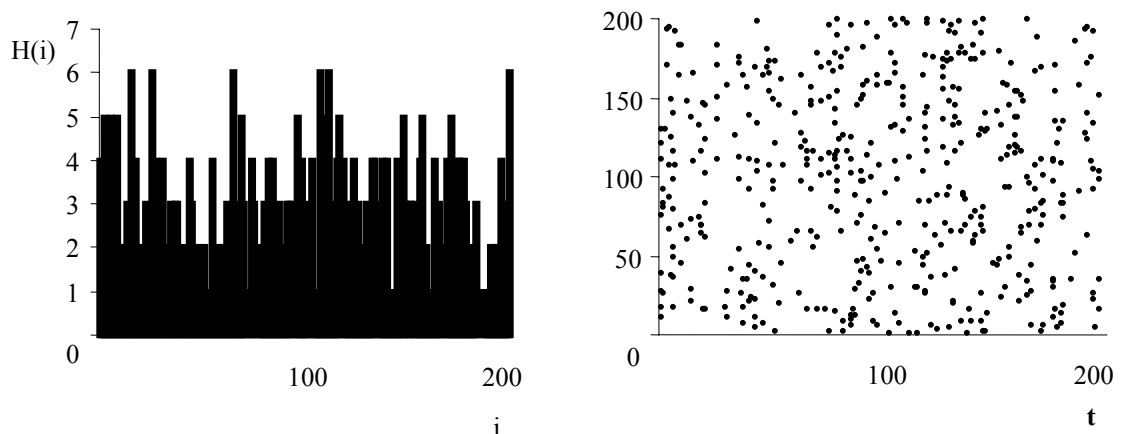


Figura 8. Representação gráfica dos *close returns* do Brasil

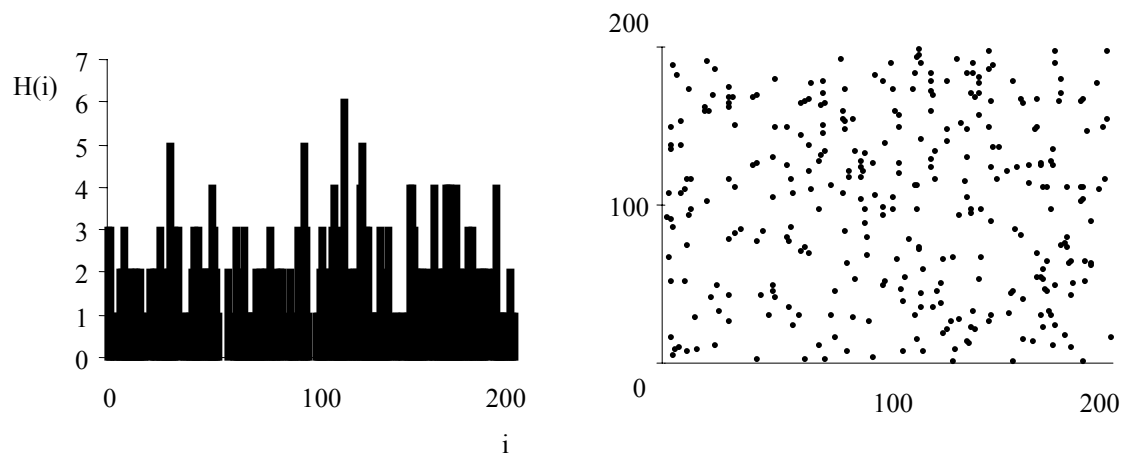


Figura 9. Representação gráfica dos *close returns* do Chile

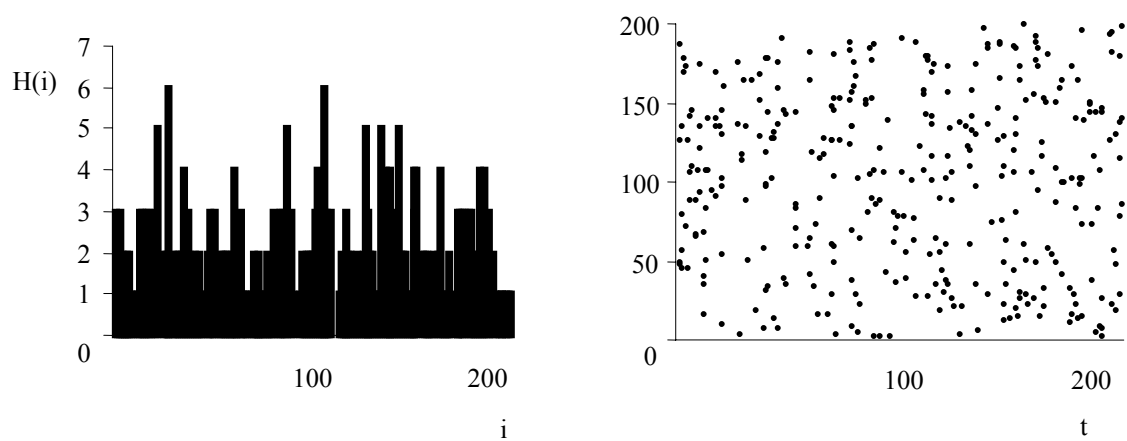


Figura 10. Representação gráfica dos *close returns* do México

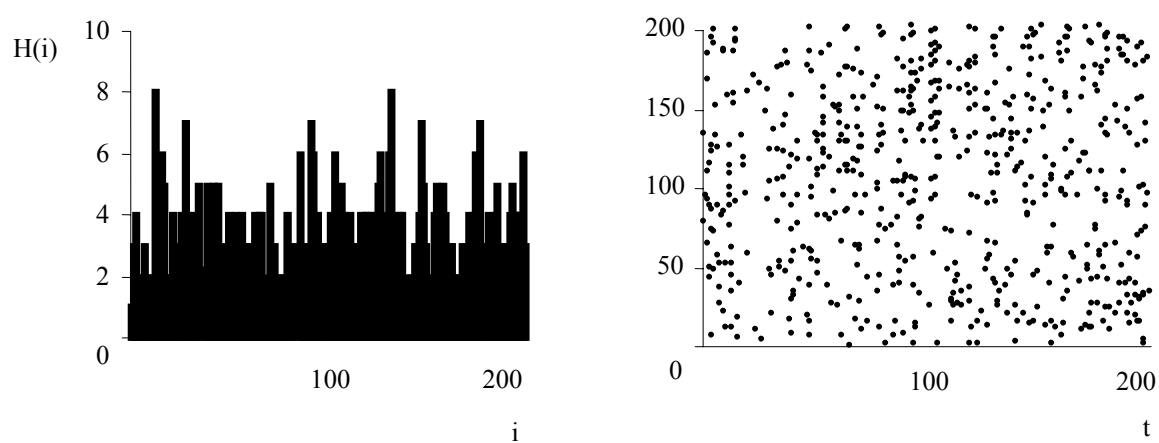
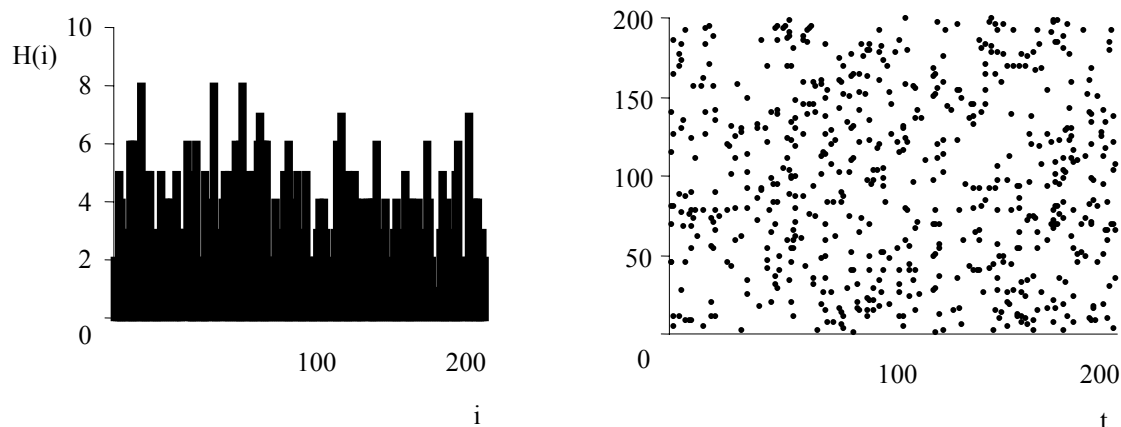


Figura 11. Representação gráfica dos *close returns* do Peru



Através da observação e análise visual da Figuras 7, 8, 9, 10 e 11 constata-se, também, não haver indícios sugestivos da presença de comportamento caótico nas variações de preços dos índices de mercado. Pelos resultados, não ficou evidenciado nenhum tipo de estrutura que pudesse identificar a formação de órbitas periódicas instáveis, ou seja, segmentos de linhas retas na horizontal.

Conclusão

Este artigo teve como objetivo investigar a possível presença de comportamento caótico nas variações de preço nos mercados de ações de cinco países da América Latina, Argentina, Brasil, Chile, México e Peru. As variações semanais dos índices foram analisadas em ajustada dólar, cobrindo o período de meados de 1994 até o início de 2002. A metodologia de investigação envolveu a aplicação do teste *close returns*, tanto no enfoque qualitativo, quanto no enfoque quantitativo.

Deve-se ressaltar que a presença de comportamento caótico nas variações de preços dos índices de mercado corroboraria para com a Hipótese de Mercados Eficientes, pois seria aceitável a presença de certos padrões nas variações de preços sem que isso tornasse possível a previsibilidade no seu comportamento futuro, possibilitando a investidores, detentores de certas informações, a construção de estratégias com ganhos anormais .

Os resultados obtidos pelo enfoque quantitativo do teste rejeitam a hipótese de haver indícios certo grau de dependência não-linear complexa nas variações dos índices de mercado. Essa afirmação é, também, sustentada pela abordagem qualitativa do teste *close returns*, onde não ficou evidente a existência de órbitas periódicas instáveis. Por outro lado, os resultados obtidos não excluem a possibilidade de dependência não-linear não-complexa, mais precisamente a dependência autoregressiva heteroscedástica, comum em dados financeiros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BACHELIER, L. Theory of speculation, (1900). In: COOTNER P. (ed). *The random character of stock market prices*. Cambridge : M.I.T. Press, p. 17-78, 1964.
- BACHELIER, L. Theory of speculation (1900). In: COOTNER, P. H. (Ed.) *The random character of stock market prices*. Cambridge: MIT Press, p. 17-78, 1964.
- BARNETT, W. A.; GALLANT, A. R.; HINICH, M. J.; JUNGEILGES, A. J.; KAPLAN, D T.; JENSEN, M. J. A single-blind controlled competition among tests for nonlinearity and chaos. *Journal of Econometrics*, v. 82, n. 1, p. 157-192, 1998.
- BROCK, W.; DECHERT, W.; SCHEINKMAN, J. A test for independence based on correlation dimension. *Working Paper*, University of Wisconsin, 1987.
- BROWN, R. A brief account of microscopical observations, etc., London, 1827. In: BRIAN, F.; BROWN, R. Brownian and teethmarks on the hatbrim. *The Microscope*, v. 39, n. 3 & 4, p. 161-171, 1991.
- CAMPBELL, J. L.; LO, A. W.; MACKINLAY, A. C. *The econometric of financial markets*. Princeton: Princeton University Press, 1997.
- CERETTA, P. S. Investigando a presença do caos no Ibovespa. *Revista Eletrônica de Administração – Read/Ufrgs*, n. 29, p. 60-79, 2002.
- CERETTA, P. S.; COSTA JR, N. C. A. Caminho aleatório: revisão, síntese e novos resultados nos mercados de capitais da América Latina. *Revista de Administração – RA/USP*, v. 37, n. 3, p. 47-57, 2002.
- CERETTA, P. S.; COSTA JR., N. C. A. Efeito dia da semana: evidência na América Latina. *Resenha BM&F*. São Paulo, n. 135, Outubro/Novembro, 1999.
- COSTA JR., N. C. A. Sazonalidade no ibovespa. *Revista de Administração de Empresas*. São Paulo, v. 30, n.3, p. 79-84, 1990.
- DUHEM, P. *Théorie physique*. Paris: Chevalier et Rivière, 1906.
- EINSTEIN, A. Ueber die von der molekular-kinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teichen, *Annalen der Physik*, v. 17, p. 549-560, 1905.
- FAMA, E. F. Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, v. 25, n.2, p. 383-417, 1970.
- FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Permanent and temporary components of stock prices. *Journal of Political Economics*, v. 96, n. 2, p. 246-273, 1988.
- GILMORE, C. G. A new test for chaos. *Journal of Economic Behavior and Organization*, v. 22, n. 2, p. 209-237, 1993.
- GILMORE, C. G. An examination of nonlinear dependence in exchange rates, using recent methods from chaos theory. *Global Finance Journal*, v. 12, p. 139-151, 2001.
- GILMORE, R. Topological analysis of chaotic dynamical systems. *Review of Modern Physics*, v. 70, n. 4, p. 1455-1530, 1998.
- GLEICK, J. *Chaos: making a new science*. New York: Viking Publishing, 1987.
- GRASSBERGER, P.; PROCACCIA, I. Measuring the strangeness of attractors. *Physica D*, v. 9, p. 189-208, 1983.
- HADAMARD, J. Les surfaces à courbures oppossés et leurs lignes géodésiques. (1898). In: RUELLLE, D. *Chance and chaos*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1991.
- HEISENBERG, W. Princípio da incerteza (1927). In: HAWKING, S. *O universo numa casca de noz*. São Paulo: Mandarin, 2001.
- HENON, D. A. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, v. 50, p. 69-77, 1976.
- JARQUE, C. M.; BERA, A. K. A test for normality of observations and regression residuals.

International Statistical Review, v. 55, p. 163-172, 1987.

KENDALL, M. G. The analysis of economic time series - Part I: Prices, (1953). In: COOTNER P. (ed). *The random character of stock market prices*. Cambridge : M.I.T. Press, p. 85-99, 1964.

LAPLACE, P. S. *Essai phylosophique sur les probabilitès*. Paris: Courcier, 1914.

LARRAIN, M. Testing chaos and nonlinearities in T-bill rates. *Financial Analysts Journal*, p. 51-62, September/October, 1991.

LO, A. W.; MACKINLAY, C. Stock market prices do not random walks: evidence from a simple specification test. *Review of Finance Studies*, v. 1, n. 1, p. 41-66, 1988.

LO, A. W.; MACKINLAY, C. Stock market prices do not follow random walks: evidence from a simples specification test. *Review of Financial Studies*, v. 1, n. 1, p. 41.66, 1988.

LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 20, p. 130-141, 1963.

MANDELBROT, B. *The geometry of nature*. New York: W. H. Freeman, 1977.

MINDLIN, G. B.; GILMORE, R. Topological analysis and synthesis of chaotic time series data. *Physica, D*, v. 58, p. 229-242, 1992.

NEWTON, I. Principia mathematica (1687). In: HAWKING, S. *O universo numa casca de noz*. São Paulo: Mandarim, 2001.

POINCARÉ, H. *Science et Méthode*. Paris: Ernest Flammarion, 1908.

POTERBA, J.; SUMMERS, L. Mean reversion in stock prices: evidence and implications. *Journal of Financial Economics*, v. 22, n. 1, p. 27-59, 1988.

ROBERTS, H. Statistical versus clinical prediction of the stock market. *Paper in Center for Research in Security Prices*. University of Chicago, May, 1967.

RUELLE, D. *Chance and chaos*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1991.

SAMUELSON, P. A. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review*, v. 6, p. 41-49, 1965.

STEWART, I. Dieu Jone – T – II Dés? Les Mathématiques du chaos. Flammarion, France, 2emé, 1988.

TUFILLARO, N. B.; SOLARI, H.; GILMORE, R. Relative rotation rates: fingerprints for strange attractors. *Physica Review A*, v. 41, p. 5717-5728, 1990.

WIENER, N. Differential-space. *Journal of Mathematic and Physics*, v. 2, p. 131-174, 1923.