

Fluxos de Caixa Contínuos e Discretos na Avaliação de Investimentos

Autoria: Luiz Ricardo Mattos Teixeira Cavalcante

Resumo

Investimentos são freqüentemente avaliados com base na premissa de que os fluxos de caixa ocorrem de forma discreta a cada período. Os resultados obtidos com base nessa premissa divergem daqueles que resultam da premissa de que os fluxos distribuem-se de forma contínua ao longo do intervalo considerado. Neste ensaio teórico, discute-se a metodologia de cálculo do valor presente de fluxos de caixa contínuos e confrontam-se os resultados com aqueles obtidos assumindo que os fluxos de caixa ocorrem de forma discreta. O valor presente dos fluxos de caixa contínuos é calculado considerando sua distribuição constante, linear e sazonal. Argumenta-se que (i) os desvios observados decorrem do formato da função que descreve o comportamento dos fluxos ao longo do tempo e do custo de capital empregado para descontar os valores; (ii) não se pode, *a priori*, considerar um método superior ao outro, uma vez que por razões operacionais, fiscais e contábeis, há circunstâncias em que o pressuposto de fluxos discretos tem mais aderência à realidade do que o pressuposto de fluxos de caixa contínuos.

1 Introdução

Decisões de investimento são tomadas confrontando-se as os fluxos de caixa incrementais associados ao projeto considerando sua magnitude, distribuição temporal e risco (ROSS et al., 1995). No conjunto de critérios empregados para dar suporte a esse tipo de decisão, destaca-se o Valor Presente Líquido (VPL), que corresponde ao somatório dos fluxos de caixa associados ao projeto descontados a uma taxa que reflete seu custo médio ponderado de capital e que, portanto, leva em conta a remuneração pela “renúncia à liquidez” (a taxa livre de risco) e pela exposição ao risco não-diversificável.

Em que pesem as controvérsias associadas a sua rigidez (colocadas no âmbito da teoria da opções reais) e à determinação do custo de capital a ser utilizado para descontar os fluxos de caixa futuros associados ao projeto, o VPL é, indiscutivelmente, o critério de tomada de decisão de investimento reconhecidamente mais robusto. A aplicação do critério do VPL apóia-se, na grande maioria dos casos, na premissa de que os fluxos de caixa ocorrem de forma discreta a cada período. Com efeito, os livros-texto de finanças corporativas (ROSS et al., 1995; BRIGHAM; HOUSTON, 2004; DAMODARAN, 1998; GITMAN, 1997) praticamente não consideram a premissa de que os fluxos podem distribuir-se de forma contínua ao longo do intervalo considerado.

Neste ensaio teórico, discute-se a metodologia de cálculo do valor presente de fluxos de caixa contínuos e confrontam-se os resultados com aqueles obtidos assumindo que os fluxos de caixa ocorrem de forma discreta. O trabalho está estruturado em mais quatro seções além desta introdução. Na Seção 2, apresenta-se uma breve revisão dos trabalhos precedentes que lidaram com a distribuição contínua dos fluxos de caixa. Em seguida, na terceira seção, apresenta-se a modelagem empregada neste trabalho considerando sua distribuição constante, linear e sazonal dos fluxos de caixa. Os resultados obtidos são então confrontados com aqueles obtidos

assumindo que os fluxos de caixa ocorrem de forma discreta na Seção 4. Finalmente, na Seção 5, apresentam-se as considerações finais do ensaio.

2 Revisão bibliográfica

Há relativamente poucos trabalhos que buscam avaliar investimentos assumindo uma distribuição contínua de fluxos de caixa ao longo do tempo. Com efeito, os livros-texto de finanças corporativas (como aqueles citados na introdução deste trabalho), seja por uma questão puramente didática (a compreensão do método para fluxos discretos é seguramente mais simples), seja em virtude de um pressuposto de que a premissa de fluxos de caixa concentrados no final de cada período levaria a resultados mais conservadores, considera, sistematicamente, que os fluxos de caixa ocorrem de forma discreta a cada período. Por outro lado, discussões mais específicas (como, por exemplo, aquelas sobre opções reais) tendem a adotar a premissa da distribuição contínua dos fluxos de caixa, embora não discutam as implicações dessa opção em relação àquela mais freqüentemente adotada (DIXIT; PINDYCK, 1994; TRIGEORGIS, 1996).

Discussões específicas sobre as implicações do uso das diferentes premissas são relativamente escassas. Ismail (1994, apud ISMAIL; CLINE, 2005) propõe um “refinamento das técnicas de fluxo de caixa descontado”. De acordo com Ismail e Cline (2005, p. 33), o trabalho “*simplifies the calculation of NPV/IRR models based on continuous discounting factors by deriving a formula based on implicit differentiation*”. Trata-se, na verdade, de uma extensa revisão de trabalhos anteriores que empregaram a hipótese de fluxos de caixa contínuos. Uma síntese dessa revisão é apresentada por Ismail e Cline (2005, p. 32).

Pogue (2004), desprezando trabalhos precedentes sobre o tema, argumenta incisivamente em favor da superioridade do pressuposto de fluxos de caixa contínuos e propõe-se a superar a fraqueza dos métodos indicados nos livros-texto de finanças propondo uma fórmula geral e uma tabela para fatores de desconto contínuos e discretos. Esse autor foi duramente criticado por Ismail e Cline (2005), que argumentam que o método proposto por Pogue (2004) não apenas não é inédito como também é apenas um caso específico de um conjunto de possibilidades de cálculo de valores presentes de caixa com base na premissa de fluxos de caixa contínuos. Além disso, Ismail e Cline (2005) não julgam que um método seria, necessariamente, superior ao outro, mas sugerem que decisões incorretas podem resultar do uso inadequado dos métodos de desconto. Embora denso e abrangente, o trabalho de Ismail e Cline (2005) usa apenas uma forma funcional para a distribuição dos fluxos de caixa ao longo do tempo (fluxos constantes) e não discute as circunstâncias em que o uso de um método seria preferível ao de outro. Questões dessa natureza permeiam as seções seguintes deste trabalho.

3 Modelagem e cálculos

De uma forma geral, investimentos são freqüentemente avaliados com base na premissa de que os fluxos de caixa ocorrem de forma discreta a cada período. A hipótese subjacente a essa premissa é que os fluxos de caixa associados a cada período discreto estariam concentrados em um momento único correspondente ao final do período. Usualmente, assume-se que o fluxo de caixa ao final do período t resultaria da soma algébrica de todos os fluxos de caixa que ocorressem durante o período (isto é, no intervalo entre $t - 1$ e t). Nesse caso,

$$CF_t = \sum_{i=t-1}^t CF_i \quad (1)$$

Essa hipótese pode ser relaxada assumindo-se que os fluxos de caixa $CF(t)$ distribuem-se de forma contínua ao longo da duração T do investimento. A função descreve, a cada instante t , o fluxo de caixa instantâneo que seria observado ao longo de um período completo (o fluxo anualizado, se a segmentação dos períodos for anual, por exemplo). Isso quer dizer que o fluxo acumulado ao final de um período corresponde ao valor médio de $CF(t)$ no intervalo.

Assumindo que os fluxos são descontados a uma taxa $r(t)$ capitalizada continuamente no tempo, o valor presente dos fluxos é dado pela integral definida indicada abaixo:

$$PV = \int_0^T \frac{CF(t)dt}{[1+r(t)]^t} \quad (2)$$

Se, adicionalmente, admite-se que a taxa $r(t)$ é uma constante r , a Equação 2 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$PV = \int_0^T \frac{CF(t)dt}{(1+r)^t}$$

$$\frac{1}{(1+r)^t} = e^{kt} \Rightarrow (1+r)^{-t} = e^{kt}$$

$$\ln(1+r)^{-t} = \ln e^{kt} \Rightarrow k = -\ln(1+r)$$

$$PV = \int_0^T e^{kt} CF(t)dt \quad (3)$$

onde

$$k = -\ln(1+r) \quad (4)$$

O resultado da integral definida indicada na Equação 3 dependerá, evidentemente, do formato assumido pela função $CF(t)$. No presente ensaio teórico, selecionaram-se os seguintes formatos:

- a) $CF(t) = a_1$, onde a_1 é constante. Nesse caso assume-se simplesmente que os fluxos de caixa são constantes no tempo;
- b) $CF(t) = a_1 + a_2 t$, onde a_1 e a_2 são constantes. $CF(t)$ é, portanto, uma função linear de t . Trata-se de uma extensão do primeiro formato, uma vez que se $a_2 = 0$, $CF(t)$ é constante no tempo; e
- c) $CF(t) = a_1 + a_2 \sin[a_3 (t + a_4)]$, onde a_1 , a_2 , a_3 e a_4 são constantes. Esse formato reflete um padrão sazonal de distribuição de fluxos de caixa.

Graficamente, os formatos que podem ser assumidos por $CF(t)$ estão indicados na Figura 1.

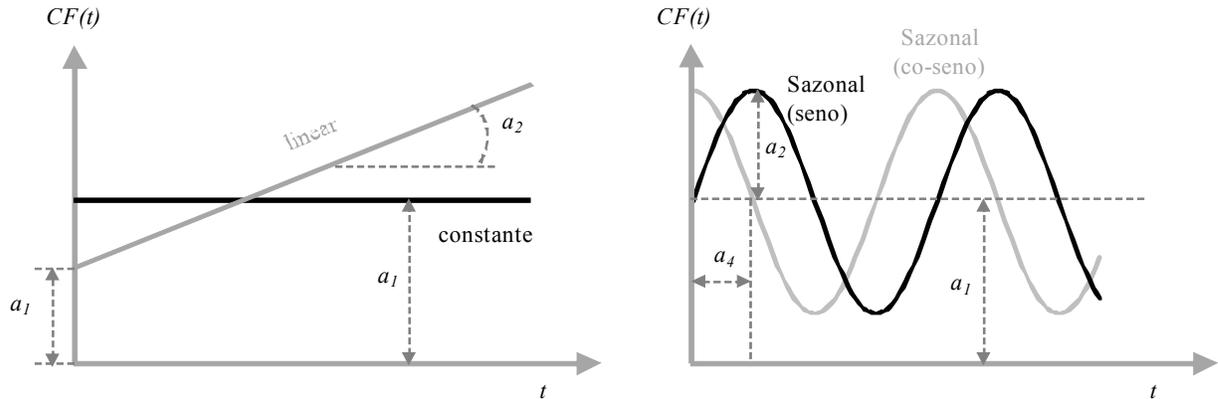


Figura 1: Formatos da função $CF(t)$

Convém observar que os coeficientes têm, em cada caso, um significado prático: no caso de fluxos constantes, a_1 é a geração de caixa por período; para fluxos de caixa lineares, a_1 e a_2 são os coeficientes linear e angular da função. Naturalmente, se $a_2 > 0$, os fluxos são ascendentes, se $a_2 < 0$ os fluxos são descendentes e se $a_2 = 0$ os fluxos são constantes. Finalmente, no caso dos fluxos sazonais, a_1 é o patamar em torno do qual oscilam os valores, a_2 é a amplitude da oscilação, a_3 converte os valores em radianos e a_4 é a defasagem a contar do ponto inicial de uma função seno; se $a_4 = 0$, por exemplo, trata-se de uma função cujo valor é a_1 em $t = 0$; se $a_4 = 0,5$, a curva é deslocada em meio período, passando a assemelhar-se a uma função co-seno.

Nas subseções seguintes, a integral indicada na Equação 3 é resolvida algebricamente para os três formatos indicados.

3.1 Fluxos de caixa constantes

Assumindo que $CF(t) = a_1$, onde a_1 é constante, a Equação 3 assume o seguinte formato:

$$PV = \int_0^T e^{kt} a_1 dt \quad (5)$$

O resultado dessa integral é dado pela Equação 6 abaixo (ver SPIEGEL, 1973, p. 85, eq. 14.509)¹:

$$PV = \left(\frac{a_1 e^{kt}}{k} \right)_{t=T} - \left(\frac{a_1 e^{kt}}{k} \right)_{t=0} \quad (6)$$

3.2 Fluxos de caixa lineares

Assumindo, agora, que os fluxos de caixa apresentam uma tendência de crescimento linear no período, isto é, que $CF(t) = a_1 + a_2 t$, onde a_1 e a_2 são constantes, o valor de PV pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$PV = \int_0^T e^{kt} (a_1 + a_2 t) dt \quad (7)$$

A integral indicada na Equação 9 pode ser segmentada em duas parcelas:

$$PV = PV_1 + PV_2 = \int_0^T e^{kt} a_1 dt + \int_0^T e^{kt} a_2 t dt \quad (8)$$

A parcela à esquerda (PV_1) pode ser obtida conforme os procedimentos adotados na Subseção 3.1. Assim,

$$PV_1 = \left(\frac{a_1 e^{kt}}{k} \right)_{t=T} - \left(\frac{a_1 e^{kt}}{k} \right)_{t=0} \quad (9)$$

Já a parcela à direita (PV_2) é dada por:

$$PV_2 = \int_0^T e^{kt} a_2 t dt = a_2 \int_0^T t e^{kt} dt \quad (10)$$

O resultado dessa integral é dado pela Equação 11 abaixo (ver SPIEGEL, 1973, p. 85, eq. 14.510):

$$PV_2 = \left[a_2 e^{kt} \left(t - \frac{1}{k} \right) \right]_{t=T} - \left[a_2 e^{kt} \left(t - \frac{1}{k} \right) \right]_{t=0} \quad (11)$$

Substituindo agora as Equações 9 e 11 na Equação 8, obtém-se

$$PV = PV_1 + PV_2 = \left[\frac{a_1 e^{kt}}{k} + a_2 e^{kt} \left(t - \frac{1}{k} \right) \right]_{t=T} - \left[\frac{a_1 e^{kt}}{k} + a_2 e^{kt} \left(t - \frac{1}{k} \right) \right]_{t=0} \quad (12)$$

3.3 Fluxos sazonais

Nesse caso, assume-se que $CF(t) = a_1 + a_2 \sin[a_3 (t + a_4)]$, onde a_1 , a_2 , a_3 e a_4 são constantes. Assim,

$$PV = \int_0^T \{a_1 + a_2 \sin[a_3 (t + a_4)]\} e^{kt} dt \quad (13)$$

A integral indicada na Equação 13 pode ser segmentada em duas parcelas:

$$PV = PV_1 + PV_2 = a_1 \int_0^T e^{kt} dt + a_2 \int_0^T \sin[a_3(t + a_4)]e^{kt} dt \quad (14)$$

Novamente, PV_1 pode ser obtido conforme os procedimentos adotados na Subseção 3.1, correspondendo ao indicado pela Equação 9. Já a integração para obter PV_2 requer o tratamento algébrico indicado a seguir:

$$PV_2 = a_2 \int_0^T \sin[a_3(t + a_4)]e^{kt} dt$$

$$\sin[a_3(t + a_4)] = \sin(a_3t + a_3a_4) = \sin(a_3t)\cos(a_3a_4) + \cos(a_3t)\sin(a_3a_4)$$

$$\cos(a_3a_4) = cte = d_1$$

$$\sin(a_3a_4) = cte = d_2$$

$$\sin[a_3(t + a_4)] = d_1 \sin(a_3t) + d_2 \cos(a_3t) \quad (15)$$

$$PV_2 = a_2 \int_0^T \sin n[a_3(t + a_4)]e^{kt} dt = a_2 \int_0^T d_1 \sin(a_3t)e^{kt} dt + a_2 \int_0^T d_2 \cos(a_3t)e^{kt} dt$$

$$PV_2 = a_2 d_1 \int_0^T \sin(a_3t)e^{kt} dt + a_2 d_2 \int_0^T \cos(a_3t)e^{kt} dt$$

Os resultados da integração das duas parcelas do lado direito da Equação 15 são indicados na Equação 16 abaixo (ver SPIEGEL, 1973, p. 85, eq. 14.518 e 14.519):

$$PV_2 = a_2 d_1 \int_0^T \sin(a_3t)e^{kt} dt + a_2 d_2 \int_0^T \cos(a_3t)e^{kt} dt$$

$$PV_2 = a_2 d_1 \left\{ \frac{e^{kt} [k \sin(a_3t) - a_3 \cos(a_3t)]}{k^2 + a_3^2} \right\} + a_2 d_2 \left\{ \frac{e^{kt} [k \cos(a_3t) - a_3 \sin(a_3t)]}{k^2 + a_3^2} \right\} \quad (16)$$

Substituindo agora as Equações 9 e 16 e as definições de d_1 e d_2 na Equação 14, vem:

$$\begin{aligned}
 PV &= PV_1 + PV_2 = \\
 &\left\langle \left(\frac{a_1 e^{kt}}{k} \right) + \right. \\
 &\quad \left. a_2 \cos(a_3 a_4) \left\{ \frac{e^{kt} [k \sin(a_3 t) - a_3 \cos(a_3 t)]}{k^2 + a_3^2} \right\} + \right. \\
 &\quad \left. a_2 \sin(a_3 a_4) \left\{ \frac{e^{kt} [k \cos(a_3 t) - a_3 \sin(a_3 t)]}{k^2 + a_3^2} \right\} \right\rangle_{t=T} - \\
 &\left\langle \left(\frac{a_1 e^{kt}}{k} \right) + \right. \\
 &\quad \left. a_2 \cos(a_3 a_4) \left\{ \frac{e^{kt} [k \sin(a_3 t) - a_3 \cos(a_3 t)]}{k^2 + a_3^2} \right\} + \right. \\
 &\quad \left. a_2 \sin(a_3 a_4) \left\{ \frac{e^{kt} [k \cos(a_3 t) - a_3 \sin(a_3 t)]}{k^2 + a_3^2} \right\} \right\rangle_{t=0} \quad (17)
 \end{aligned}$$

4 Implicações

Os resultados obtidos acima, embora aparentemente áridos, têm um conjunto de implicações práticas para a análise de projetos de investimentos.

A primeira observação é que a premissa de que fluxos de caixa uniformemente distribuídos de forma contínua têm um valor presente PV_{const} maior do que aquele que seria obtido ao se assumir sua distribuição discreta PV_{disc} . Por exemplo, assumindo $CF(t) = \$100,00$ e $r = 10\%$, o valor presente obtido no intervalo entre 0 e 1 é dado por PV_{const} :

$$\begin{aligned}
 PV_{const} &= \left(\frac{a_1 e^{kt}}{k} \right)_{t=1} - \left(\frac{a_1 e^{kt}}{k} \right)_{t=0} \\
 PV_{const} &= \left(\frac{100 e^{1,1 \times 1}}{1,1} \right) - \left(\frac{100 e^{1,1 \times 0}}{1,1} \right) = 95,38
 \end{aligned}$$

Esse valor situa-se entre o fluxo acumulado ao final do primeiro período (\$100,00) e o valor descontado se se considerasse a distribuição discreta dos fluxos PV_{disc} , que corresponde a \$90,91 (ou \$100/1,1). Esses resultados, assim como os demais mencionados nesta seção, estão indicados na Tabela 1 adiante. A diferença (da ordem de 5%) é ascendente com as taxas de desconto. Com efeito, para $r = 20\%$ a diferença percentual entre os dois valores chega a quase 9%. Nesse caso, é evidente que assumir que os fluxos concentram-se no final do período pode levar um projeto viável (isto é, com $VPL > 0$) a ser rejeitado.

Uma solução parcial para a distorção provocada em decorrência do uso de fluxos discretos poderia envolver a consideração dos fluxos no prazo médio do período, no lugar da sua usual

representação ao final do período. Para o exemplo anterior, o valor presente discreto do fluxo representado no meio do período corresponde a \$95,35 (ou $\$100/1,1^{0,5}$), o que resulta em valor muito próximo àquele obtido mediante a consideração de fluxos contínuos (\$95,38).

No caso de fluxos de caixa lineares, a magnitude dos desvios entre PV_{const} e PV_{disc} depende da trajetória ascendente ou descendente dos fluxos no tempo. Assim, assumindo que os fluxos anualizados entre $t = 0$ e $t = 1$ passam de \$50,00 para \$150,00 (o que indica que os fluxos acumulados no final do período alcançariam \$ 100,00), o desvio entre PV_{const} e PV_{disc} seria um pouco menor do que 4%. Contudo, o mesmo fluxo total de \$100,00 resultante de uma trajetória descendente dos fluxos anualizados (passando de \$ 150,00 para \$50,00, por exemplo²) levaria a um desvio superior a 5%. A conclusão é convergente com o bom senso: no primeiro caso, os maiores fluxos estão mais próximos do final do período, e o erro cometido ao se assumir que todos eles ocorrem nesse momento é menor do que aquele que se observa quando os fluxos maiores estão mais próximos do início do período. Mais uma vez, o custo de capital influencia fortemente os resultados: ao se considerar $r = 20\%$, os erros, nos dois casos indicados, passam para cerca de 7% e 10%, respectivamente (Tabela 1).

Finalmente, no caso de fluxos sazonais, persiste a constatação de que se os fluxos maiores estão mais próximos do final do período, os desvios entre PV_{const} e PV_{disc} são menores do que aqueles observados quando os fluxos estão mais próximos do início do período. Numericamente, pode-se assumir, por exemplo, fluxos anualizados oscilando em torno de \$100,00 e com amplitude de \$50,00 (isto é, que variam entre \$50,00 e \$150,00 ao longo do período). Se entre $t = 0$ e $t = 1$ a função assemelha-se a uma função seno (isto é, o pico dos fluxos ocorre no início do período), o erro cometido é da ordem de 5%; se, alternativamente, a função tem uma defasagem de meio período (assemelhando-se, portanto, a uma função co-seno indicada na Figura 1), o desvio cai para menos de 4% (Tabela 1).

Tabela 1: Desvios entre PV_{const} e PV_{disc}

| | | Constante | Linear ascendente | Linear descendente | Sazonal (seno) | Sazonal (co-seno) |
|------------|--------------|-----------|-------------------|--------------------|----------------|-------------------|
| $r = 10\%$ | PV_{const} | 95,38 | 94,62 | 96,14 | 96,11 | 94,66 |
| | PV_{disc} | 90,91 | 90,91 | 90,91 | 90,91 | 90,91 |
| | Desvio | 4,69% | 3,93% | 5,44% | 5,41% | 3,96% |
| $r = 20\%$ | PV_{const} | 91,41 | 90,03 | 92,80 | 92,74 | 90,09 |
| | PV_{disc} | 83,33 | 83,33 | 83,33 | 83,33 | 83,33 |
| | Desvio | 8,84% | 7,43% | 10,20% | 10,14% | 7,50% |

5 Considerações finais

Duas conclusões se tornam evidentes a partir da análise dos desvios obtidos na seção anterior:

- Pode haver diferenças significativas entre os resultados obtidos com base na premissa de que os fluxos de caixa ocorrem de forma discreta a cada período e aqueles obtidos com base na premissa de que os fluxos distribuem-se de forma contínua ao longo do intervalo considerado. Os desvios observados podem facilmente superar 5%;

- b) Os desvios são ascendentes com as taxas de desconto utilizadas, sugerindo que projetos com maiores níveis de risco são particularmente sensíveis à escolha do método adequado de desconto de seus fluxos de caixa.

À parte as discussões sobre a aderência dos modelos à realidade de projetos específicos, não se deve perder de vista, ainda, que os modelos obtidos na Seção 3 – e outros que possam resultar de formatos alternativos para $CF(t)$ – são analíticos, contínuos e deriváveis (opostamente aos modelos que pressupõem fluxos de caixa discretos), sendo mais adequados para aplicações com opções reais e modelos teóricos³. Na verdade, nesses casos, a adoção da premissa de fluxos contínuos pode representar uma simplificação dos procedimentos matemáticos, uma vez que funções descontínuas – por não serem sempre deriváveis – trazem dificuldades adicionais para a modelagem matemática de determinados sistemas. Essa é uma das razões pelas quais autores como Dixit e Pindyck (1994) e Trigeorgis (1996) freqüentemente apóiam-se na premissa de que os fluxos de caixa distribuem-se de forma contínua ao longo do tempo.

Diante dessas conclusões, resta discutir as razões que motivam a prática disseminada de descontar os fluxos de caixa assumindo que sua ocorrência concentra-se no final de cada período. É claro que uma possível razão é de natureza didática e decorre da facilidade de cálculo dos fluxos discretos em oposição aos modelos mais complexos para fluxos contínuos. Isso, entretanto, não parece justificar o uso dos procedimentos simplificados, especialmente se se leva em conta que não há impedimentos para o uso de *softwares* para os cálculos mais complexos.

Outra possível explicação seria o fato de que a premissa de fluxos concentrados no final de período seria mais conservadora, isto é, tenderia a reduzir o valor presente dos fluxos futuros a serem confrontados com o investimento inicial, tornando mais parcimonioso o processo de decisão de investimento. Essa explicação singela, entretanto, não encontra amparo quando se tem em mente os esforços que vêm sendo feitos para tornar mais precisos e aderentes à realidade os modelos de tomada de decisão de investimento. Esforços para a determinação mais precisa do custo de capital, por exemplo, poderiam ser irrelevantes diante de erros deliberadamente cometidos ao se descontarem os fluxos de caixa.

Contudo, não se deve perder de vista que a premissa de que os fluxos de caixa concentram-se no final de cada período pode ser mais aderente à realidade do que aquela que pressupõem sua distribuição contínua no tempo. Com efeito, é razoável supor que empresas cuja produção ou consumo se dá evidentemente em unidades discretas (como estaleiros e fabricantes de aviões, por exemplo) tenham distribuição de fluxos de caixa decorrentes de contratos que pressupõem pagamentos em momentos determinados e descontínuos. Além disso, aspectos de natureza fiscal e contábil – a apuração de lucros e o pagamento de impostos, por exemplo – causam inflexões nos fluxos de caixa. Dessa forma, por razões operacionais, fiscais e contábeis, há circunstâncias em que o pressuposto de fluxos discretos tem mais aderência à realidade do que o pressuposto de fluxos de caixa contínuos, sendo preciso, portanto, dedicar uma especial atenção a seu padrão de distribuição de modo a evitar que decisões incorretas decorram do uso inadequado do método de desconto.

Referências

BRIGHAM, Eugene F.; HOUSTON, Joel F. **Fundamentals of financial management**. 10th ed. Mason (OH): Thomson South-Western, 2004.

DAMODARAN, Aswath. **Applied corporate finance: a user manual**. New York: John Wiley & Sons, 1998.

DIXIT, A. K.; PINDYCK, R.S. **Investments under uncertainty**. New Jersey: Princeton University Press, 1994.

GITMAN, Lawrence J. **Princípios de administração financeira**. São Paulo: Harbra, 7º ed., 1997.

ISMAIL, Tariq; CLINE, Melinda. Investment appraisal under conditions of continuous and discrete cash flow and discounting. **Managerial Auditing Journal**, v. 20, n. 1, p. 30-35, 2005.

POGUE, Michael. Investment appraisal: a new approach. **Managerial Auditing Journal**, v. 19, n. 4, p. 565-569, 2004.

ROSS, Stephen A.; WESTERFIELD, Randolph W.; JAFFE, Jeffrey F. **Administração financeira**. São Paulo: Atlas, 3º ed., 1995.

SPIEGEL, Murray R. **Manual de formulas e tabelas matemáticas**. São Paulo: McGraw-Hill, 1973.

TRIGEORGIS, Lenos. **Real Options: managerial flexibility and strategy in resource allocation**. Cambridge: The MIT Press, 1996.

¹ Optou-se aqui por manter o resultado da integral indefinida conforme indicado na Equação 6. Entretanto, rearranjando-se os termos da Equação 6 e substituindo k por $-\ln(1+r)$, obtém-se:

$$PV = a_1 \left(\frac{e^{kT}}{k} - \frac{1}{k} \right)$$

$$PV = a_1 \left(\frac{e^{kT} - 1}{k} \right) = a_1 \left[\frac{1 - e^{-\ln(1+r)T}}{\ln(1+r)} \right]$$

$$PV = \frac{1}{\ln(1+b)} \frac{a_1}{(1+b)^t}$$

Verifica-se, então, que no caso de fluxos de caixa lineares no tempo os valores presentes que seriam obtidos ao se assumir a premissa de fluxos de caixa discretos $\frac{a_1}{(1+b)^t}$ são inferiores àqueles obtidos assumindo fluxos de caixa

uniformemente distribuídos ao longo do período, uma vez que o fator $\frac{1}{\ln(1+b)}$ é sempre um número positivo para

$r > 0$. Nesse caso, há, portanto, convergência entre o resultado obtido e a percepção de que a premissa de fluxos de

caixa discretos seria mais conservativa (isto é, tenderia a minimizar os valores presentes dos fluxos futuros), uma vez que fluxos mais próximos da data presente estariam sendo descontados como se ocorressem apenas ao final de cada período. A esse respeito ver Ismail e Cline (2005).

² Nesses casos, as funções seriam $CF(t) = 50,00 + 10,00 t$ e $CF(t) = 150,00 - 100,00 t$, respectivamente.

³ Cabe registrar que o desenvolvimento de um modelo teórico para a análise de viabilidade de investimentos em confiabilidade foi a motivação original para o presente ensaio teórico.