

## Comportamento Caótico em Modelos Simplificados de Cadeias Produtivas

Autoria: Júlio César Bastos de Figueiredo

**Resumo:** Este trabalho apresenta um modelo simples, baseado na metodologia de Dinâmica de Sistemas (FORRESTER, 1961), que descreve o comportamento de uma cadeia produtiva onde as relações entre o número de competidores, os tempos de resposta para ajustes da produção, e a intensidade da resposta de cada empresa, levam intrinsecamente ao surgimento de oscilações caóticas na oferta e da demanda do mercado. Discutem-se as causas de flutuações econômicas nos mercados quando associadas ao comportamento competitivo de grupos de empresas. São feitas considerações sobre a importância do estudo de sistemas dinâmicos e caos aplicados à administração, e são discutidas técnicas rigorosas para caracterização de comportamento caótico em séries temporais econômicas. Por fim, são apontadas direções futuras para este trabalho.

### 1. Introdução.

Os setores econômicos evoluem de forma dinâmica ao longo do tempo. As relações entre as empresas, os governos e os mercados são complexas e fazem com que não apenas a estrutura e o comportamento dos mercados afetem o comportamento das empresas, mas também com que, em algumas situações, o comportamento das empresas leve a mudanças na estrutura e no comportamento dos mercados.

Para se estudar a influência dos mercados sobre o comportamento das empresas, em geral, opta-se por uma abordagem clássica derivada da microeconomia. Nela as cadeias produtivas são entendidas como um conjunto de atores, basicamente empresas e consumidores, que estabelecem relações de troca de informação e produtos. Tais relações podem levar a um equilíbrio fixo estável do sistema, mas também pode dar origem a oscilações intrínsecas e complexas (LEE; PADMANABHAN; WHANG, 2004).

As abordagens mais apropriadas para tratar o ambiente empresarial e econômico hoje em dia são aquelas fundamentadas nos paradigmas sistêmicos, cuja ênfase está na compreensão da estrutura do modelo dinâmico subjacente aos processos. De modo não rigoroso, um modelo dinâmico pode ser definido como uma estrutura teórica (mental, matemática, computacional, etc.) utilizada para modelar determinados fenômenos cujos estados, ou uma descrição instantânea deles, evoluem no tempo. Pode-se atribuir às aplicações deste tipo de modelo as seguintes funções na administração: preditiva, na qual o objetivo é prever estados futuros do sistema a partir de observações do passado e do estado presente desse sistema; diagnóstica, na qual o objetivo é deduzir quais dos possíveis estados passados do sistema poderiam ter conduzido ao presente estado; e aplicativa, na qual o objetivo é prover uma teoria para os fenômenos em questão. Estas três características correspondem a necessidades básicas do campo da administração no sentido de se tentar prever, explicar, e entender os fenômenos sociais e econômicos.

Entende-se hoje que a economia e os processos de negócios são sistemas não lineares em permanente processo de auto-organização, que constantemente apresentam novas propriedades emergentes (BROCK; DECHERT, 1990; LEBARON, 1994; WILDING, 1998). Todavia, boa parte dos modelos teóricos hoje existentes tende a considerar apenas relações lineares entre os elementos econômicos e produtivos dos mercados, desconsiderando ciclos de realimentação, tempos de retardos e mesmo comportamento caótico.

Embora muito do comportamento entre firmas tenha sido modelado com sucesso na economia e nas escolas de estratégia empresarial utilizando a teoria dos jogos (CAMERER, 1991), estes

modelos tendem a presumir, em geral, a emergência apenas de equilíbrios fixos estáveis. Tais equilíbrios podem não refletir adequadamente a dinâmica dos setores econômicos envolvidos. Sistemas dinâmicos não lineares, em especial aqueles que apresentam comportamento caótico não alcançam um equilíbrio fixo estável. Qualquer aparente estabilidade fixa é breve, pois é sensível a mínimas perturbações do ambiente. Além disso, as trajetórias competitivas das empresas são influenciadas pelos seus passos passados - *path dependence* - (ARTHUR, 1994). Essa dependência do caminho reforça o caráter não linear das interações e compromete ainda mais a capacidade de compreensão e previsibilidade dos fenômenos. Muitas vezes as empresas acreditam que determinado comportamento externo do mercado é criado por mecanismos exógenos ao setor, quando na verdade é a estrutura competitiva intrínseca das empresas é que pode estar gerando instabilidades.

Este trabalho apresentará um modelo simples, baseado na metodologia de Dinâmica de Sistemas (FORRESTER, 1961), que descreve o comportamento de uma cadeia produtiva onde as relações entre o número de competidores, os tempos de resposta para ajustes da produção, e a intensidade da resposta de cada empresa, levam intrinsecamente ao surgimento de oscilações caóticas na oferta e da demanda do mercado. O comportamento caótico será caracterizado de forma rigorosa e serão discutidas as causas dessas flutuações, associadas ao comportamento competitivo do grupo de empresas.

## 2. Dinâmica de Sistemas.

É inegável a importância do pensamento sistêmico hoje em dia no processo de planejamento (GEORGANTZAS; ACAR, 1995). Ao analisar uma cadeia produtiva sob a ótica da teoria dos sistemas, vê-se que ela é composta de inúmeros elementos, que por si só podem ser considerados subsistemas. Esses elementos são integrados entre si e se relacionam funcionalmente objetivando a realização de um ou mais propósitos. As empresas de um lado recebem inputs do ambiente (materiais, informações, etc.) e os transformam em outputs (produtos, resíduos, etc.) que são então novamente devolvidos ao ambiente. A abordagem sistêmica do processo de planejamento da administração tem como ponto de partida a construção dos modelos mentais que descrevem esses sistemas (SENGE, 1994). Tais modelos são representações das estruturas subjacentes aos sistemas organizacionais ou sociais que estão sendo analisados. Procura-se com eles examinar a inter-relação causal das forças estruturais em um contexto mais amplo que permita entendê-las como parte de um processo comum (PIDD, 1996).

A Dinâmica de Sistemas é uma metodologia ligada ao pensamento sistêmico que busca estudar as estruturas dos sistemas organizacionais e sociais por meio da representação das relações causais entre os seus elementos e por meio do estudo de sua evolução ao longo do tempo. O principal objetivo é explicar o comportamento de um determinado sistema partindo das interações entre as diversas partes que o compõe (FORRESTER, 1961; PIDD, 1984; STERMAN, 2000). Utilizando ferramentas e ambientes computacionais de simulação, permite aos pesquisadores testar diferentes políticas e soluções para a operação de um sistema, avaliando o impacto de suas decisões e proporcionando um conjunto de instrumentos para compreensão e comunicação sobre os modelos construídos (PIDD, 1996). A Dinâmica de Sistemas assume que a análise de uma situação pode ser empreendida de um ponto de vista externo ao sistema, e que a estrutura e os processos dinâmicos podem ser recriados em diagramas com simbologia específica e modelos matemáticos apropriados.

Em Dinâmica de Sistemas a idéia fundamental é que o comportamento dinâmico de um sistema obedece a um princípio chamado de “princípio da acumulação”. Este princípio postula que a resposta dinâmica de um sistema decorre da transição dos valores de seus

recursos acumulados em estoques, e que essas transições são controladas por fluxos de entrada e saída nos estoques. Ou seja, o comportamento dinâmico surge quando algo flui por algum meio. Este princípio leva a uma forma particular de representação causal conhecida por *Diagramas de Estoque e Fluxo* (STERMAN, 2000).

Nestes diagramas os estoques, ou níveis, são representados graficamente por retângulos. Eles representam caixas onde se acumula algum recurso do sistema. Os estoques são variáveis cujo valor, ou estado, depende dos fluxos. Os fluxos são representados por setas de traço duplo que são cortadas por um triângulo. Os fluxos representam o transporte dos recursos dentro do sistema. Os fluxos são vazões e por isto são representados por um ícone parecido com um cano com uma torneira. A Figura 1 mostra a representação básica de um estoque controlado por um fluxo em Dinâmica de Sistemas (a nuvem em uma das pontas da seta representa uma fonte infinita alimentando o fluxo).

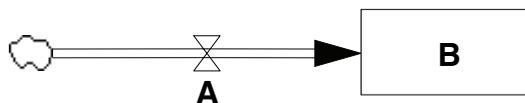


Figura 1: Estoque (B) controlado por um Fluxo (A).

Na Figura 1 o valor do estoque B é controlado pelo fluxo A. Este controle pode ser expresso por meio de uma equação diferencial que descreve as transições dos valores do estoque B entre os instantes  $t$  e  $t+dt$ . Estas transições são descritas pela Equação 1:

$$B(t + dt) = B(t) + A(t) \cdot dt \Rightarrow A(t) = \frac{dB}{dt}. \quad 1$$

No processo de modelagem com Diagramas de Estoque e Fluxo, tanto variáveis físicas como de informação podem fluir pelos fluxos se acumulando em estoques, e este acúmulo é decorrente da diferença entre os fluxos de entrada e os fluxos de saída. Logo, os recursos ao longo do tempo não podem mudar instantaneamente de valor.

Os valores futuros dos estoques são o foco das decisões dos gestores. Os fluxos representam as políticas do sistema. Os fluxos podem ser descritos na forma de equações algébricas que podem envolver variáveis auxiliares e, ou, o valor atual dos estoques (MORECROFT; ASAY; STERMAN, 1994). É importante notar que os fluxos atuais de um sistema são modificados por ações presentes que decorrem de decisões presentes, enquanto que os estoques atuais dependem do acúmulo de todas as decisões passadas (FORRESTER, 1969).

Uma das principais vantagens do uso da metodologia de Dinâmica de Sistemas provém de sua capacidade de melhorar o desempenho no processo de modelagem, principalmente quando buscamos estudar fluxos de material, informação e dinheiro dentro de estruturas econômicas (FERNANDES, 2001).

### 3. O Modelo Desenvolvido.

A Figura 2 apresenta o modelo simplificado de cadeia produtiva desenvolvido neste trabalho. Neste modelo a demanda  $d$  é uma função do preço  $p$ . A função entre demanda e preço (chamada *função de demanda*) permite determinar a quantidade de consumidores que estão dispostos a comprar o produto por um determinado preço. Neste trabalho optou-se por utilizar uma função de demanda sigmoïdal, que é dada pela Equação 2.

$$d(t) = \varphi \frac{\alpha^\gamma}{\alpha^\gamma + p(t)^\gamma}. \quad 2$$

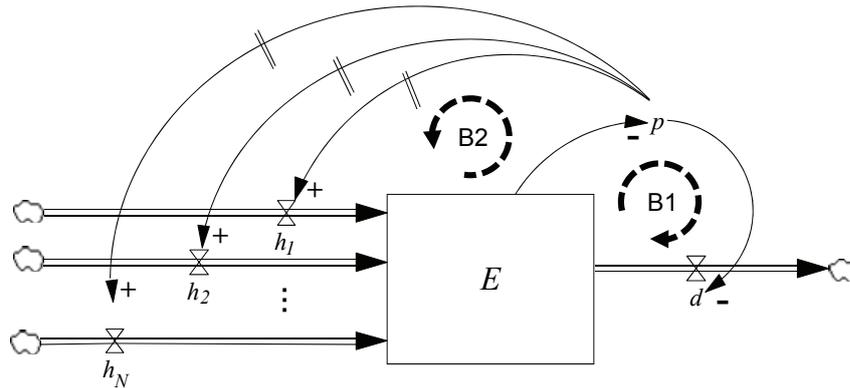


Figura 2: Modelo simplificado de cadeia produtiva desenvolvido neste trabalho.

Na Equação 2 o parâmetro  $\phi$  é um parâmetro de escala. Ele determina o valor máximo que a demanda pode atingir quando  $p(t) \rightarrow 0$ . O parâmetro  $\alpha$  representa o preço de corte da demanda. Já o parâmetro  $\gamma$  indica a intensidade de queda da demanda quanto  $p(t)$  aproxima-se do preço de corte. A Equação 2 é uma das formas básicas de uma função sigmoideal conhecida como função de Hill (HEIDEL; MALONEY, 1999). A Figura 3 mostra dois exemplos de curvas da Equação 2.

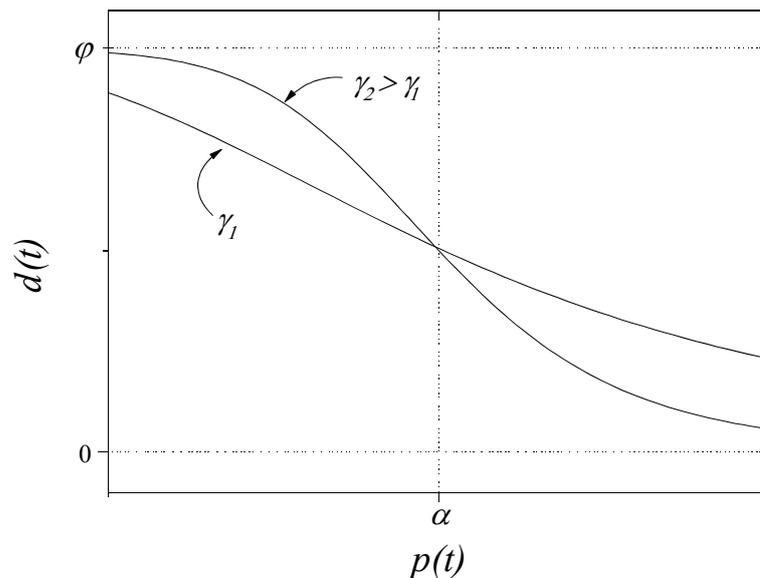


Figura 3: Exemplos de curvas da Equação 2.

O preço  $p$  é definido no modelo como sendo função do estoque  $E$ . O estoque  $E$  representa o estoque total agregado de bens acabados, de todos os produtores, no mercado. Supõe-se, por simplicidade, que os produtos não possuem diferenciação, de tal forma que os níveis de estoque individuais das empresas podem ser agregados em um único estoque de mercado. Este estoque é responsável pela oferta direta de produtos no mercado, afetando os preços. A *função de preço* é aquela que permite determinar o preço que os consumidores estão dispostos a pagar por uma determinada quantidade ofertada. Para manter a consistência com a função de demanda utilizada, define-se a função de preço também como uma função sigmoideal.

$$p(t) = \phi \frac{\beta^\lambda}{\beta^\lambda + E(t)^\lambda} \quad 3$$

Na Equação 3 o parâmetro  $\square$  é um parâmetro de escala. Ele determina o valor máximo que o preço pode atingir quando  $E(t) \rightarrow 0$ . O parâmetro  $\beta$  representa o estoque (oferta) de corte. Já o parâmetro  $\lambda$  indica a intensidade de queda no preço quanto  $E(t)$  aproxima-se do valor de corte. Deve-se perceber que no modelo o estoque  $E$  também é afetado diretamente pelo fluxo da demanda, ou seja, a demanda “escoa” os produtos para o mercado. Essa relação acaba por formar um ciclo de realimentação negativa (B1) que representa o ciclo do equilíbrio econômico clássico oferta-preço-demanda.

Na Figura 2,  $h_1, h_2, \dots, h_N$  representam os fluxos de produção de  $N$  empresas que atuam no mercado. Estas empresas produzem produtos pouco diferenciados que irão abastecer o estoque agregado  $E$ . Supõe-se que os fluxos produtivos das empresas são definidos pelas expectativas de ganhos dessas empresas, e que essas expectativas são proporcionais ao preço de mercado de seus produtos, ou seja, preços altos de mercado (acima de um determinado patamar de corte) tenderão a disparar a produção das empresas, enquanto preços baixos tenderão a limitar essa produção. Considera-se que as empresas têm capacidades distintas de reação, ou seja, os preços que motivam a reação de produção diferem de empresa para empresa, alterando o momento da decisão de produzir (BEAN, 1929; FRASER, 1988).

Além disso, nem todas as empresas podem ter a mesma velocidade de reação, algumas podem demorar mais para adequar sua produção às variações de preço, outras podem reagir mais rapidamente. Em geral, tempos de retardo são naturalmente identificados entre o início do processo de produção e a entrega final dos produtos no mercado. Mas também podem estar presentes entre a detecção de alguma condição externa de mercado e o efetivo ajuste do processo produtivo interno das empresas. Para capturar essa eventual característica no modelo, considerou-se que as funções de produção  $h_i$  das empresas são funções do preço praticado em certo instante de tempo no passado (Equação 4).

$$h_i(t) = k_i \frac{p(t - \tau_i)^{n_i}}{p(t - \tau_i)^{n_i} + \theta_i^{n_i}} \quad 4$$

Na Equação 4 o índice  $i$  indexa as empresas. O tempo de retardo que cada empresa leva para reagir às variações de preço é representado por  $\tau_i$ , sendo que o preço de reação de cada empresa é dado  $\theta_i$ . Os parâmetros  $k_i$  são parâmetros de escala que representam o valor máximo de produção que cada empresa pode atingir. Por fim,  $n_i$  representa a intensidade de resposta de cada empresa quando o preço mercado se aproxima do preço de corte.

O fato dos fluxos produtivos das empresas alimentarem o estoque  $E$  acaba por formar um conjunto ciclos de realimentação negativa (B2). Estes ciclos representam os ciclos de regulação da capacidade produtiva de cada empresa. Note que o modelo como um todo apresenta apenas ciclos de realimentação negativa, o que indica a presença de características de auto-regulação (BENABOU; TIROLE, 2004). Todavia, tal fato não implica que soluções complexas não possam surgir no sistema. De fato, veremos mais adiante que pontos fixos e soluções periódicas podem dar lugar a soluções caóticas no sistema dependendo dos parâmetros adotados.

O estoque de produtos acabados  $E$  é única variável que se acumula no sistema, e em razão disto será escolhida como a variável de interesse neste estudo. O valor estoque  $E$  pode ser expresso por meio da seguinte equação diferencial (obtida a partir do modelo da Figura 2):

$$\frac{d}{dt} E(t) = -d(t) + \sum_{i=1}^N h_i(t). \quad 5$$

A construção de um programa computacional que resolva a Equação 5 no tempo nem sempre é fácil. Felizmente as ferramentas de simulação de Dinâmica de Sistemas já são desenhadas para programar e simular, de maneira natural, estruturas como as da Figura 2. Pode-se, com o uso dessas ferramentas, integrarem-se numericamente as equações para a obtenção da evolução do sistema. Cabe ao modelador especificar as funções que definem cada variável e então deixar que o sistema se encarregue da solução numérica (EBERLEIN, 2003). Neste trabalho as soluções da Equação 5 serão integradas com o auxílio do software Vensim PLE da Ventana Systems ([www.vensim.com](http://www.vensim.com)).

#### 4. Soluções do Modelo

Considere o conjunto de parâmetros listado na Tabela 1.

$N = 3$ $\varphi = \phi = 0.75$ $\gamma = \lambda = 3$ $\alpha = \beta = 0.6$ $k_1 = k_2 = k_3 = 1/3$ $n_1 = n_2 = n_3 = n$ $\theta_1 = 0.4; \theta_2 = 0.5; \theta_3 = 0.6$ $\tau_1 = 0.6; \tau_2 = 1.9; \tau_3 = 0.8$
--

Tabela 1: Conjunto de parâmetros da Equação 5 que leva a soluções caóticas.

Os dados da Tabela 1 representam uma cadeia com três empresas ( $N=3$ ) onde os tempos de retardo ( $\tau_i$ ) para ajuste na produção e os valores dos preços de corte ( $\theta_i$ ) diferem entre si. Considera-se que as três empresas têm limites idênticos de capacidade produtiva ( $k_1=k_2=k_3=1/3$ ) e que também reagem com a mesma intensidade ao detectar a proximidade do preço de corte ( $n_1=n_2=n_3=n$ ). Este conjunto de parâmetros foi escolhido porque restringe as soluções ao intervalo  $0 \leq E(t) \leq 1$  e porque apresenta, para alguns valores  $n$ , soluções caóticas. Outros tipos de solução, tais como pontos fixos estáveis, surgiram para valores diferentes de parâmetros, mas não serão tratadas neste trabalho.

As séries temporais da Equação 5, simulada com o conjunto de parâmetros da Tabela 1, e com valores de  $n$  correspondentes a  $n=45$ ,  $n=53$ ,  $n=56$  e  $n=60$  podem ser vistas na Figura 4. As séries temporais dos gráficos 4-a, 4-b e 4-c são periódicas com períodos de proporções 1:2:4 respectivamente. A série temporal do gráfico 4-d é aperiódica. Para melhor visualizar a diferença nos períodos das séries podem-se construir os espectros de potência. Os espectros de potência são gráficos que representam o quadrado da amplitude da transformada de Fourier do sinal. São utilizados tipicamente para identificação de frequências.

A Figura 5 apresenta os espectros de potência das séries temporais da Figura 4. Na Figura 5-a vê-se um espectro de potência com um pico correspondente a uma frequência principal acompanhada por harmônicos de frequências mais altas. Note que o pico correspondente à frequência principal do sistema ainda aparece nos demais espectros de potência dessa figura. Observe também que quando se aumenta o valor de  $n$ , passando de  $n=45$  (Figura 5-a) para  $n=53$  (Figura 5-b), um novo pico correspondente à metade da frequência principal é somado ao espectro, e surge um novo conjunto de harmônicos cujas frequências são metade das frequências dos harmônicos anteriores. O mesmo processo ocorre quando passamos de  $n=53$  (Figura 5-b) para  $n=56$  (Figura 5-c). Esse processo é chamado de *duplicação de períodos* e, em geral, ocorre com o aumento do parâmetro de controle (no nosso caso  $n$ ) até que é

alcançado um regime como o da Figura 5-d, onde um número infinito de frequências baixas e seus harmônicos acabam por criar um espectro de banda larga (aperiódico).

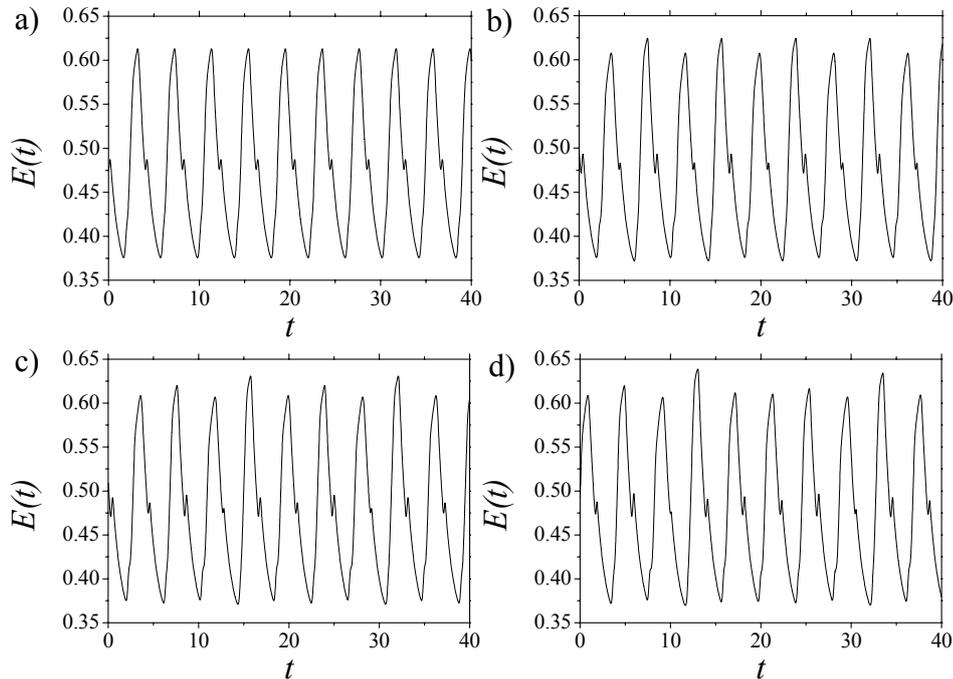


Figura 4: Séries temporais obtidas a partir da Equação 5 para o conjunto de parâmetros indicados na Tabela 1. Gráficos: a)  $n=45$ , b)  $n=53$ , c)  $n=56$  e d)  $n=60$ .

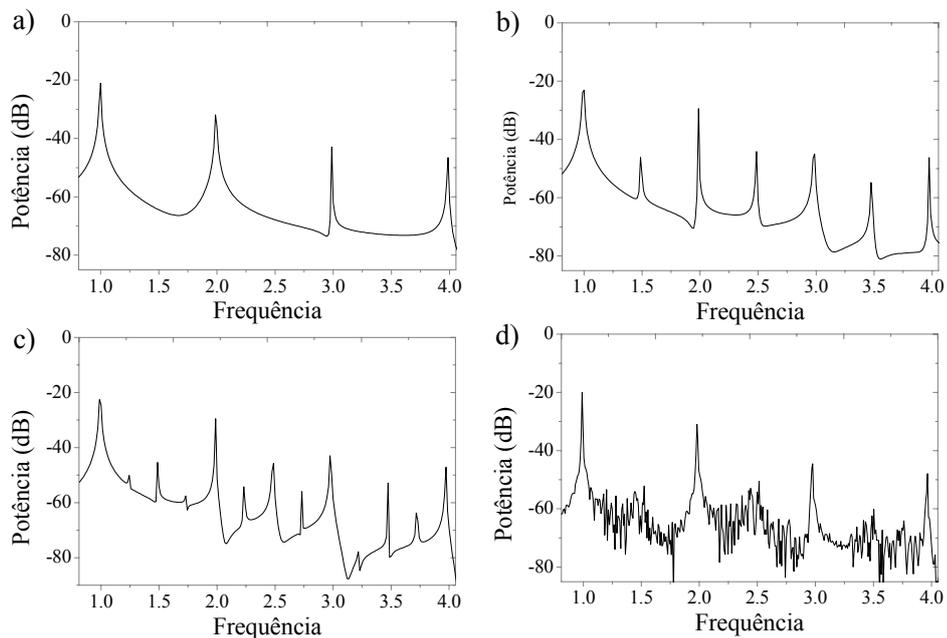


Figura 5: Espectros de potência correspondentes às séries temporais da Figura 4.

Sabe-se que séries temporais caóticas apresentarem espectro de potência de banda larga (THOMPSON; STEWART, 2002). Todavia, um espectro desse tipo, como o que é visto na Figura 5-d, ainda não é suficiente para caracterizar um regime como sendo caótico. Sinais estocásticos como o ruído branco, e mesmo sinais onde o número de componentes harmônicos é muito grande, podem gerar esse tipo de comportamento. Para caracterização de uma solução como caótica, métodos complementares devem ser empregados.

## 5. Caracterização de Soluções Caóticas.

Para descrever o estado de um sistema em dado instante no tempo é necessário definir-se um espaço matemático abstrato constituído pelas variáveis dinâmicas desse sistema. Este espaço é conhecido como *espaço de fases* (ou ainda *espaço de estados*) (THOMPSON; STEWART, 2002). Ao evoluir neste espaço, o sistema traça uma trajetória que é conhecida como *trajetória de fase* sistema.

Em alguns sistemas a evolução das trajetórias de fase tende a ficar limitada a uma região restrita do espaço. Por mais que tentemos afastar o sistema dessa região ele é atraído de volta a ela. Quando isso ocorre, a trajetória é chamada de *atrator* do sistema (ECKMANN, 1981). Os exemplos mais simples de atratores são pontos fixos, que correspondem a soluções constantes no tempo, ou *ciclos limite*, que são trajetórias oscilantes periódicas. Todavia, existem outros tipos de atratores, que são chamados de *atratores estranhos*.

Um atrator é denominado estranho quando a sua trajetória de fase depende sensivelmente das condições iniciais (RUELLE; TAKENS, 1971). Em um atrator estranho, pontos inicialmente próximos se separarão exponencialmente depois de um intervalo suficientemente longo. Todavia, o atrator se mantém sempre em uma região limitada do espaço de fases. A única maneira pela qual trajetórias podem divergir exponencialmente e ainda assim se manter limitadas a uma região do espaço, é se essas trajetórias se contraírem em algumas direções e se expandirem em outras, permanecendo assim em uma região finita. Esse processo de formação dos atratores estranhos é conhecido por processo de *dobra e estiramento* (ou *foliação*) (FERRARA; DO PRADO, 1994).

Sistemas dinâmicos que apresentam atratores estranhos possuem algumas características comuns fundamentais: (a) *imprevisibilidade*, ou seja, o conhecimento do estado do sistema durante um tempo arbitrariamente longo não permite predizer, de maneira imediata, a evolução posterior. A imprevisibilidade está associada à dependência das condições iniciais. (b) *espectro contínuo de frequências*, caracterizando um comportamento aperiódico. E (c) *invariância de escala*, significando uma estrutura hierárquica, com dimensão não inteira, e com características de *auto-similaridade* nas estruturas do espaço de fase.

Essas características definem o chamado comportamento caótico de um sistema. Em razão disso os atratores estranhos são também chamados de *atratores caóticos*. É importante ressaltar que o comportamento caótico de um sistema, representado principalmente pela dependência das condições iniciais, é resultado das características dinâmicas intrínsecas do sistema, não sendo produzido por perturbações de natureza estocástica. Por isso, esse comportamento é caracterizado como *caótico determinístico*.

Para caracterizar e analisar as propriedades dinâmicas de um atrator caótico é necessário reproduzi-lo em um espaço de fases de dimensão adequada. É possível reproduzir certas propriedades topológicas do atrator original de um sistema utilizando um método simples, conhecido como *reconstrução de Takens* (TAKENS, 1981). Nesse método, vetores  $m$ -dimensionais são reconstruídos a partir de uma série temporal discreta  $\{x_j\}$  por meio do vetor

$$\vec{\xi}_i = \{x(t_j), x(t_j + s), \dots, x(t_j + (m-1)s)\}, \quad 6$$

onde  $m$  é chamada de *dimensão de imersão* e  $s$  é de *passo de reconstrução*.

Os gráficos da Figura 6 mostram os atratores reconstruídos por meio do método de Takens para as séries temporais da Figura 4 (com  $m=2$  e  $s=0.6$ ). Os atratores das Figuras 6-a, 6-b e 6-c são periódicos. Não importa o número de pontos da série temporal utilizados para a

reconstrução, o comprimento da trajetória de fase limita-se sempre à trajetória das órbitas representadas na figura. Já na Figura 6-d, vemos uma série temporal aperiódica, e nesse caso, se aumentarmos o número de pontos utilizados para a reconstrução, o atrator preencherá mais densamente o espaço de fases. Além disso, observa-se ao simular a evolução do sistema a partir de várias condições iniciais, que há uma mudança na forma como as trajetórias do atrator da Figura 6-d são preenchidas, ou seja, a trajetória depende da condição inicial utilizada.

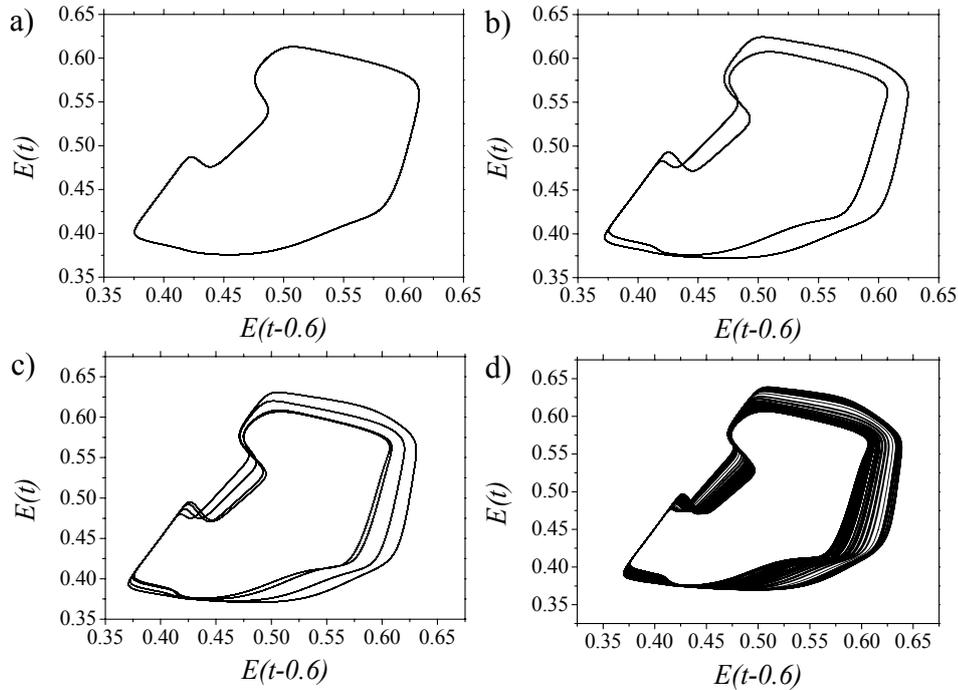


Figura 6: Atratores reconstruídos utilizando o método de Takens com  $m=2$  e  $s=0.6$  para as séries temporais da Figura 4.

É difícil ter uma boa idéia acerca da dinâmica de um sistema observando apenas a estrutura dos atratores no espaço de fases, principalmente no caso atratores caóticos. Isso se deve ao emaranhado desenhado por esses atratores no espaço. Esse emaranhado é decorrente do processo de alongamentos e dobras pelo qual esses atratores evoluem (GRASSBERGER; PROCACCIA, 1983b). Para ter uma melhor idéia do que acontece em relação à dinâmica de alguns sistemas, pode-se fazer uso de um *mapa unidimensional*.

Um mapa unidimensional  $F$  é uma função que fornece o próximo estado,  $F(x_i)$ , de um sistema dado o seu estado atual,  $x_i$ , ou seja:  $x_{i+1}=F(x_i)$  (THOMPSON; STEWART, 2002). Existe um método que permite reduzir as trajetórias de fase de um sistema a um mapa unidimensional discreto. Uma superfície é colocada no caminho das trajetórias de fase e é atravessada por elas. Cada um dos cruzamentos da trajetória com a superfície é registrado e então é construído um gráfico dos cruzamentos sucessivos. Esse gráfico é chamado de *mapa de retorno* (THOMPSON; STEWART, 2002).

No caso dos atratores da Figura 6, os mapas de retorno foram obtidos considerando-se os sucessivos cruzamentos da trajetória de fase com a linha  $E(t)=0.45$  quando  $dE/dt < 0$ . Define-se então  $x_i$  como sendo o valor de  $E(t)$  correspondente ao  $i$ -ésimo cruzamento dessa seção. O gráfico formado pelos pontos no espaço  $(x_i, x_{i+1})$  é o mapa de retorno. O resultado pode ser visto na Figura 7. Em cada uma dos gráficos foram computados 200 cruzamentos com a linha  $E(t)=0.45$ , porém, apenas na Figura 7-d todos os cruzamentos corresponderam a pontos

distintos no espaço  $(x_i, x_{i+1})$ . Observe que a distribuição final dos pontos nesse plano forma uma curva que pode ser aproximada por uma função com um único máximo. É sabido que esse tipo de mapa unidimensional discreto é típico de alguns sistemas que apresentam caos (FEIGENBAUM, 1978; ECKMANN, 1981).

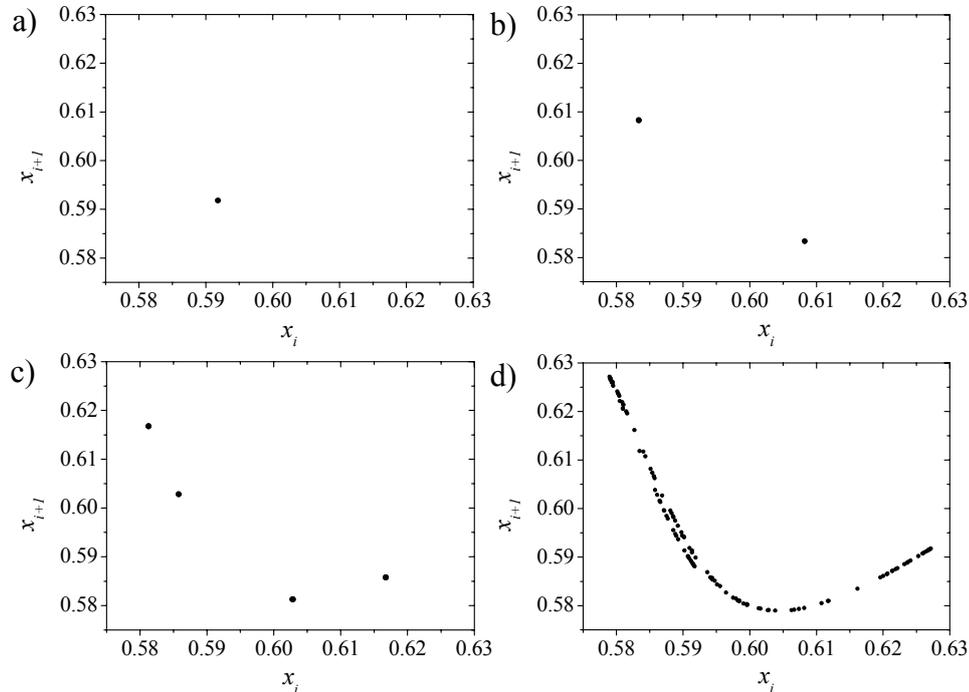


Figura 7: Mapas de retorno obtidos a partir dos atratores da Figura 6. Considera-se para cada atrator os sucessivos cruzamentos da trajetória de fase com a linha  $E(t) = 0.45$  com  $dE/dt < 0$ . Foram computados 200 cruzamentos em cada figura.

Quando a dimensão de reconstrução dos atratores é apropriada, o número de pontos no mapa de retorno representará o período da órbita original do atrator reconstruído, ou seja, uma órbita de período 1 corresponderá a um único ponto, uma órbita de período 2 a dois pontos e assim sucessivamente. Se a órbita gerada for caótica, o número de pontos no mapa será grande, igual ao número de iterações computadas. É isso que vemos na Figura 7.

O parâmetro  $n$  foi escolhido neste estudo como parâmetro de controle do sistema. Percebe-se que mudanças nesse parâmetro alteraram a estabilidade dos atratores, mudando seu comportamento. O valor de um parâmetro para o qual muda o comportamento de um sistema é chamado de ponto de bifurcação (GUCKENHEIMER; HOLMES, 1983).

Um tipo de bifurcação bastante frequente e importante é aquele onde, para certo valor do parâmetro de controle, existe uma oscilação de período  $T$ . Ao se atingir um segundo valor para o parâmetro de controle, a oscilação torna-se instável e uma oscilação de período  $2T$  aparece. Esse tipo de bifurcação é chamada de *bifurcação de duplicação de período*. Certos sistemas podem apresentar uma série infinita de bifurcações de duplicação de período com um ponto de acumulação a partir do qual surge o comportamento caótico. Esse caminho para o caos é chamado de *rota de duplicação de períodos* (FEIGENBAUM, 1978).

Para reforçar a existência de uma rota de duplicação de períodos no modelo apresentado neste trabalho, foi construído um *diagrama de bifurcações* (com o parâmetro  $n$ ) a partir dos mapas de retorno. Para 200 valores de  $n \in [40, 60]$  foi feito um mapa de retorno, onde se registraram 300 cruzamentos. Os pontos registrados em cada mapa foram então colocados em um gráfico como função de  $n$ . O resultado está na Figura 8. Nessa figura podemos perceber nitidamente a

presença de uma rota de duplicação de períodos para caos. Isso reforça a conjectura de que o sistema representado pela Equação 5 realmente apresenta soluções caóticas.

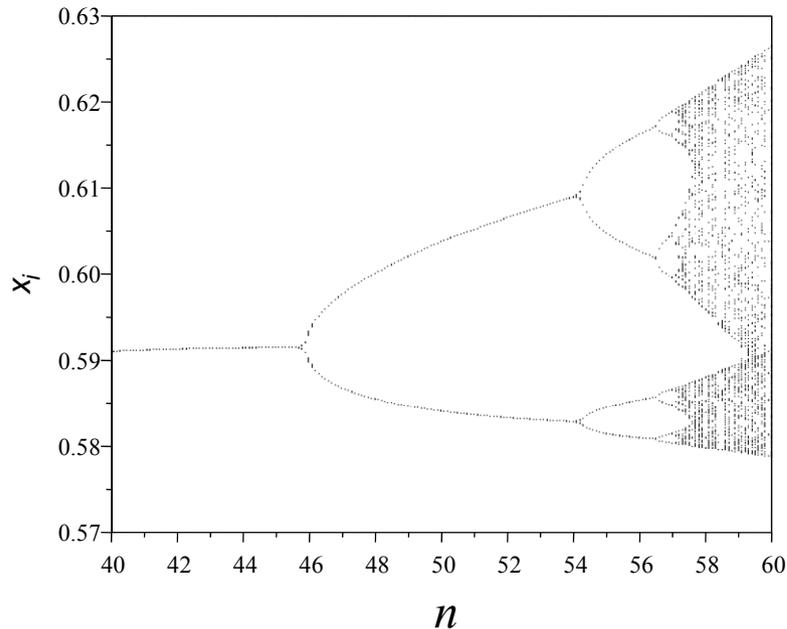


Figura 8: Diagrama de bifurcações da Equação 5 em relação ao parâmetro de controle  $n$ . Os parâmetros dos mapas de retorno utilizados foram os mesmos utilizados para a construção da Figura 7.

Outra evidência de que o modelo da Figura 2 pode apresentar comportamento caótico seria o fato de algum dos atratores possuírem dimensão não inteira. Normalmente, quando falamos de dimensão, estamos nos referindo à dimensão euclidiana, onde os objetos geométricos têm sempre dimensão inteira: um ponto tem dimensão zero, uma linha tem dimensão um, uma superfície tem dimensão dois, etc. Contudo, quando falamos de atratores estranhos, é possível encontrar objetos geométricos complexos com dimensões não inteiras. Tais objetos geométricos são genericamente chamados de *fractais* (MANDELBROT; WHEELER, 1983). Vamos evidenciar o fato de que o atrator da Figura 6-d é realmente caótico calculando sua dimensão fractal por meio da *dimensão de correlação*. A dimensão de correlação é atualmente muito utilizada para o cálculo da dimensão de atratores devido ao fato de poder ser calculada facilmente com um algoritmo desenvolvido na década de 80 (GRASSBERGER; PROCACCIA, 1983a). A dimensão de correlação é dada por

$$D_2 \square \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(m, \varepsilon)}{\log \varepsilon}, \quad 7$$

onde:

$$C(m, \varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \Theta \left[ \varepsilon - |x_i^{(m)} - x_j^{(m)}| \right] \quad 8$$

é conhecida como *integral de correlação*. Nas Equações 7 e 8 o parâmetro  $m$  é a dimensão de imersão do atrator (escolhida durante a reconstrução de Takens).  $N$  é o número de pontos do atrator,  $x_i^{(m)}$  é o vetor  $m$ -dimensional associado ao  $i$ -ésimo ponto do atrator reconstruído e  $\Theta$  é a função de Heaviside. A função  $C(m, r)$  representa a fração de todas as distâncias, entre pares distintos de pontos sobre a trajetória de fase do atrator, que não excedem um certo valor de raio  $\varepsilon$ . O valor de  $D_2$  será dado pela inclinação da reta definida pelo gráfico

$\log C(m, \varepsilon) \times \log \varepsilon$  para  $\varepsilon$  pequeno. Como na prática desconhecemos qual é a dimensão de imersão adequada à reconstrução do atrator, procede-se da seguinte forma: o valor de  $D_2$  é calculado para toda uma gama de dimensões de imersão  $m$ . Quando a dimensão  $m$  for suficientemente alta, e o valor de  $\varepsilon$  apropriado,  $D_2$  deve convergir para um patamar bem definido no gráfico  $D_2 \times \varepsilon$  (FERRARA; DO PRADO, 1994). Na Figura 9 vemos o resultado do cálculo da dimensão de correlação do atrator da Figura 6-d. O valor obtido foi  $D_2=1.85$ , o que mostra que o atrator possui baixa dimensão e que esta dimensão é fractal (caótica).

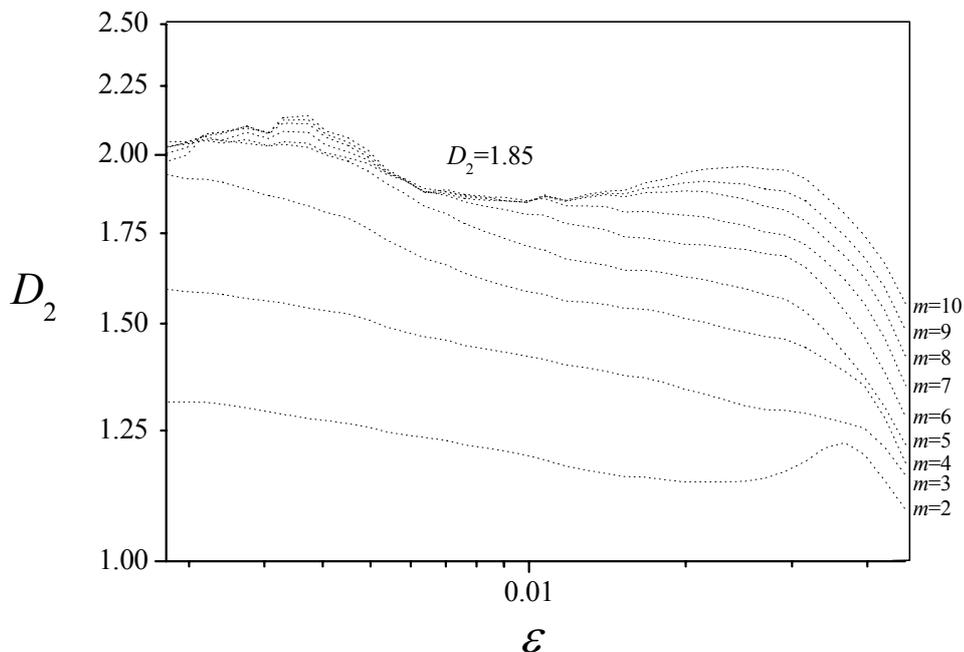


Figura 9: Determinação da dimensão de correlação ( $D_2$ ) do atrator da Figura 6-d.

Por fim, um último teste que pode ser feito para verificar se o atrator da Figura 6-d é realmente caótico é testar se, além da ausência de periodicidade e da dimensão fractal, existe sensibilidade às condições iniciais. Diz-se que o sistema apresenta esse tipo de sensibilidade se, para qualquer par de condições iniciais separadas inicialmente por uma distância  $\Delta_0$ , a evolução do sistema cria trajetórias que afastam esses pontos a uma taxa proporcional a  $e^{\lambda t}$ , ou seja,  $\Delta_t \approx \Delta_0 e^{\lambda t}$ . O expoente  $\lambda$  é conhecido na literatura como *expoente de Lyapunov*. A existência de um expoente de Lyapunov positivo indica que o sistema é caótico. Para determinar o expoente de Lyapunov calcula-se, para diversos valores de dimensão de imersão  $m$ , o logaritmo da expansão média dos pontos vizinhos no atrator em função do tempo. A inclinação das curvas  $\ln(\bar{\Delta}_t) \times t$  deve convergir para o valor de  $\lambda$  (KANTZ, 1994). A Figura 10 mostra as curvas  $\ln(\bar{\Delta}_t) \times t$  obtidas para o atrator da Figura 6-d. Note que a inclinação das curvas converge para o valor de  $\lambda=0.0076$ . Isso indica que o atrator apresenta divergência exponencial das trajetórias, caracterizando a dependência sensível às condições iniciais e, portanto, o comportamento caótico.

## 6. Conclusões

O objetivo deste trabalho foi mostrar que mesmo sistemas econômicos simples, baseados unicamente em ciclos de realimentação positiva, podem apresentar comportamento caótico e imprevisível como decorrência das próprias políticas de gerenciamento do sistema. Em geral, ao se estudar oscilações em variáveis econômicas duas perguntas básicas devem ser feitas: As

causas principais das flutuações estão associadas a mecanismos endógenos ou exógenos ao sistema? E podem tais oscilações ser caracterizadas por meio de modelos determinísticos? Evidências de soluções caóticas nesse tipo de modelo podem ser indicativas de que flutuações irregulares na demanda e nos preços podem ser devidas não apenas a flutuações estocásticas, mas podem estar intimamente relacionadas com a própria estrutura determinística de gerenciamento da cadeia, ou seja, por suas regras, políticas e capacidades (LEE; PADMANABHAN; WHANG, 2004). Em outras palavras, as flutuações podem ser devidas principalmente a forma como as empresas reagem às variações geradas por elas mesmas no mercado. (WILDING, 1998).

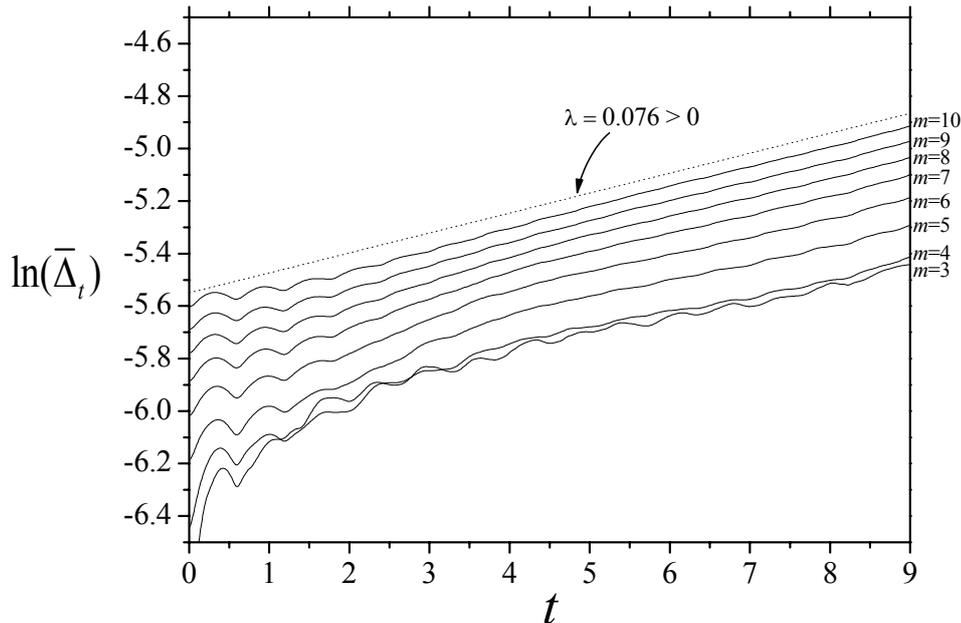


Figura 10: Determinação do expoente de Lyapunov ( $\lambda$ ) do atrator da Figura 6-d.

A habilidade humana em tomar decisões é limitada. Mesmo que os tomadores de decisão tenham *informação perfeita*, é mais provável que o comportamento econômico dos atores obedeça a regras ou procedimento simples ao invés de buscar caminhos para atingir ótimos globais (SIMON, 1979).

Esta simplicidade está presente no modelo na Figura 2. O modelo estudado descreve uma cadeia produtiva com poucas empresas, que competem com produtos pouco diferenciados e atuam em um mercado com preços regulados por um grande estoque agregado (oferta). Um exemplo pode ser o setor de cimento no Brasil, o qual está sendo modelado atualmente pelo autor com o uso dos modelos apresentados neste trabalho. Vemos também na Equação 5 que há apenas dois mecanismos competindo no sistema. O primeiro é o crescimento estimulado da produção, que é uma resposta retardada ao preço de mercado. Esse mecanismo é descrito pelo segundo termo a direita da equação. O segundo mecanismo é o escoamento do estoque gerado pela demanda de mercado. Apesar da simplicidade das relações, o balanceamento desses dois mecanismos é que gera as oscilações irregulares no estoque  $E$ .

No modelo estudado o início da produção é desencadeado pelo surgimento de preços relativamente elevados, que sinalizam uma alta demanda e uma baixa oferta. Esta situação oferece a promessa de retornos atrativos incentivando para que haja a produção. De forma análoga, quando há uma queda na demanda e um aumento na oferta, os preços caem e a produção no mercado tipicamente se reduz. Assume-se na prática que as flutuações de alta ou baixa demanda podem ser causadas, por exemplo, por ruídos externos no consumo ou no

fornecimento do produto. Isso pode ser verdade, todavia, o tempo de retardo natural entre a detecção de uma oportunidade e o início da produção leva a uma amplificação da reação das empresas. Se os preços de certo produto são baixos, então sua oferta produtiva cresce lentamente, devido a custos iniciais e custos fixos de produção; se os preços forem altos, então a oferta também crescerá lentamente, devido a limitações de oferta e capacidade de produção. Nas faixas intermediárias de preços o mercado acaba por oscilar freneticamente buscando ajustes que levam a um aumento da irregularidade, que em casos específicos, acaba por se tornar caótico.

O comportamento caótico tem sido extensivamente estudado nos campos da física e das ciências naturais; entretanto, a existência de caos em dados econômicos e em modelos de cadeias produtivas é ainda uma questão aberta. Várias contribuições têm sido feitas na literatura relativas a este tema (BARNETT; CHEN, 1988; MACKEY, 1989; BROCK; DECHERT, 1990; LEBARON, 1994; RAMSEY; ROTHMAN, 1994), inclusive com o lançamento, em 1996, de um jornal diretamente voltado para esses assuntos (*Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*). Este trabalho busca dar uma contribuição para esta área e incentivar outros pesquisadores a se interessarem por essas aplicações.

## 7. Bibliografia

ARTHUR, W. B. *Increasing Returns and Path Dependence in the Economy*. University of Michigan Press. 1994

BARNETT, W. A.; CHEN, P. The aggregation-theoretic monetary aggregates are chaotic and have strange attractors: an econometric application of mathematical chaos. *Dynamic Econometric Modeling: Proceedings of the Third International Symposium in Economic Theory and Econometrics*. 1988.

BEAN, L. H. The Farmers' Response to Price. *Journal of Farm Economics*, v.11, n.3, p.368-385. 1929.

BENABOU, R.; TIROLE, J. Self-Knowledge and Self-Regulation An Economic Approach. *The Psychology of Economic Decisions*. 2004.

BROCK, W. A.; DECHERT, W. D. *Nonlinear Dynamical Systems: Instability and Chaos in Economics*. Social Systems Research Institute, University of Wisconsin. 1990

CAMERER, C. F. Does Strategy Research Need Game Theory? *Strategic Management Journal*, v.12, p.137-152. 1991.

EBERLEIN, R. Vensim 5.1 Reference Manual. *Ventana Systems*. 2003.

ECKMANN, J. P. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. *Reviews of Modern Physics*, v.53, n.4, p.643-654. 1981.

FEIGENBAUM, M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, v.19, n.1, p.25-52. 1978.

FERNANDES, A. Dinâmica de Sistemas e Business Dynamics: Tratando a Complexidade no Ambiente de Negócios. *XXI ENEGEP-Encontro Nacional de Engenharia de Produção*. Salvador 2001.

FERRARA, N. F.; DO PRADO, C. P. C. Caos, uma introducao. *Edgard Blucher, Sao Paulo*. 1994.

FORRESTER, J. W. *Industrial dynamics*: MIT Press. 1961

\_\_\_\_\_. *Urban Dynamics*: Productivity Press. 1969

FRASER, R. W. A method for evaluating supply response to price underwriting. *Australian Journal of Agricultural Economics*, v.32, n.1, p.22-36. 1988.

GEORGANTZAS, N. C.; ACAR, W. *Scenario-driven planning: learning to manage strategic uncertainty*: Quorum Books. 1995

GRASSBERGER, P.; PROCACCIA, I. Characterization of Strange Attractors. *Physical Review Letters*, v.50, n.5, p.346-349. 1983a.

\_\_\_\_\_. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v.9, n.1-2, p.189-208. 1983b.

GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. Nonlinear Oscillations. *Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York*, v.8291. 1983.

HEIDEL, J.; MALONEY, J. When can sigmoidal data be fit to a Hill curve. *J. Australian Math. Soc., Series B, Applied Math*, v.41, p.83-92. 1999.

KANTZ, H. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series. *Physics Letters A*, v.185, n.1, p.77-87. 1994.

LEBARON, B. Chaos and Nonlinear Forecastability in Economics and Finance. *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering*, v.348, n.1688, p.397-404. 1994.

LEE, H. L.; PADMANABHAN, V.; WHANG, S. Information Distortion in a Supply Chain: The Bullwhip Effect. *Management Science*, v.50, n.12 Supplement, p.1875-1886. 2004.

MACKAY, M. C. Commodity price fluctuations: Price dependent delays and nonlinearities as explanatory factors. *Journal of Economic Theory*, v.48, n.2, p.497-509. 1989.

MANDELBROT, B. B.; WHEELER, J. A. The Fractal Geometry of Nature. *American Journal of Physics*, v.51, p.286. 1983.

MORECROFT, J. D. W.; ASAY, D.; STERMAN, J. D. *Modeling for Learning Organizations*: Productivity, Incorporated. 1994

PIDD, M. *Computer simulation in management science*: John Wiley & Sons, Inc. New York, NY, USA. 1984

\_\_\_\_\_. *Modelagem empresarial: ferramentas para tomada de decisão*: Bookman. 1996

RAMSEY, J. B.; ROTHMAN, P. Comment on " Nonlinear Monetary Dynamics" by DeCoster and Mitchell. *Journal of Business & Economic Statistics*, v.12, n.1, p.135-136. 1994.

RUELLE, D.; TAKENS, F. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, v.20, n.3, p.167-192. 1971.

SENGE, P. M. *The fifth discipline fieldbook: strategies and tools for building a learning organization-1994*: New York: Currency, Doubleday. 1994

SIMON, H. A. Rational decision making in business organizations. *American Economic Review*, v.69, n.4, p.493-513. 1979.

STERMAN, J. *Business Dynamics*: McGraw-Hill, Inc. New York, NY, USA. 2000

TAKENS, F. Detecting strange attractors in turbulence. *Lecture Notes in Mathematics*, v.898, n.1, p.366-381. 1981.

THOMPSON, J. M. T.; STEWART, H. B. *Nonlinear Dynamics and Chaos*: Wiley. 2002

WILDING, R. Chaos theory: implications for supply chain management. *International Journal of Logistics Management*, v.9, n.1, p.43-56. 1998.