

Política de Gerenciamento de Caixa por Modelos Evolutivos: uma Comparação com o Modelo Miller-Orr

Autoria: Marcelo Botelho da Costa Moraes, Marcelo Seido Nagano

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo a aplicação de algoritmos genéticos (AG) e *particle swarm optimization* (PSO) no gerenciamento do saldo de caixa, definindo políticas relativas ao saldo ideal de caixa (Z), o limite superior de caixa (H), acima do qual devem ser retirados recursos do caixa para investimento em uma aplicação de alta liquidez, e o limite inferior de caixa (L), abaixo do qual a empresa deve resgatar seus investimentos.

A cada transferência de recursos em aplicação ou resgate o nível de caixa deve retornar ao ideal (Z). Assim, conforme a literatura sobre os modelos de gerenciamento de caixa, principalmente a partir do modelo Miller-Orr, que consiste em um modelo estocástico que não define um único ponto ideal para o saldo de caixa, mas uma faixa de oscilação entre um limite inferior (L), um saldo ideal (Z) e um limite superior (H).

Desta forma, este trabalho propõe a aplicação dos modelos computacionais evolutivos de algoritmos genéticos (AG) e *particle swarm optimization* (PSO), para minimizar o Custo Total de manutenção do saldo de caixa, obtendo os parâmetros para uma política de gerenciamento de caixa, com Z, H e L, utilizando para isso premissas apresentadas na literatura, considerando o custo de manutenção do caixa e o custo de oportunidade.

Assim, foram desenvolvidos experimentos computacionais a partir de fluxos de caixa simulados com base em uma distribuição normal, com diferentes médias e variâncias, a fim de aplicar os algoritmos AG e PSO. Como forma de controle dos resultados foi desenvolvido um algoritmo de otimização que utiliza o modelo Miller-Orr, definindo o parâmetro limite inferior (L) que não é indicado pelo modelo.

Para comparação entre os algoritmos, foi calculado o desvio relativo médio (DRM) de cada algoritmo em relação a melhor solução, aquela que apresenta o menor custo de caixa, e o tempo computacional, ambas como medidas de eficiência. Também foi calculado o percentual de vezes em que cada algoritmo obteve o melhor resultado como medida de eficácia.

Posteriormente foi aplicado o Teste T para duas amostras presumindo variâncias equivalentes no intuito de verificar se a diferença entre os custos obtidos pelos algoritmos era estatisticamente significativa.

Os resultados indicam que o algoritmo PSO apresenta melhor eficiência (DRM) e eficácia (percentual de acerto), porém com maior tempo computacional. Entretanto o Teste T demonstra que os custos obtidos pelos algoritmos PSO e AG são semelhantes, não sendo estatisticamente diferentes, porém com melhorias em relação ao modelo Miller-Orr.

Assim, tanto PSO quanto AG podem ser úteis na determinação de políticas de gerenciamento de caixa, apresentando resultados promissores neste tipo de problema, com possibilidade de desenvolvimento em políticas mais complexas, envolvendo custos diferenciados de investimento e resgate.

Introdução

Gerenciar o disponível em caixa é um problema constante em todo o tipo de organização. Isto ocorre em função das entradas e saídas diárias de dinheiro, sejam elas pela atividade operacional da empresa ou por operações financeiras que esta tenha negociado. Assim, existe a necessidade de controlar os recursos financeiros de maneira a obter o melhor resultado para a organização.

Nesse sentido, a função da administração de caixa tem como responsabilidades mobilizar, controlar e planejar os recursos financeiros das empresas (SRINIVASAN; KIM, 1985). Com isso, a utilização de modelos de apoio à tomada de decisão se torna pertinente, uma vez que podem proporcionar uma visão abrangente e de otimização algo que dificilmente pode ser obtido sem a utilização de metodologias para tal.

Dessa forma, a utilização de modelos no problema de definição do nível ideal de recursos disponíveis em caixa teve sua origem nos trabalhos de Baumol (1952) e Tobin (1956), onde os autores partem do pressuposto de que saldo disponível em caixa pode ser definido como uma *commodity* em estoque, ou seja, um bem padronizado, cujo controle pode ser diário, semanal, mensal, etc., dependendo do nível de detalhamento temporal da empresa.

Para estes autores, a definição do saldo de caixa ótimo segue o padrão dos modelos de dimensionamento de estoque, onde se considera o recurso financeiro disponível como um estoque, que possui certos custos associados a sua origem e manutenção, mas que também gera benefícios indispensáveis para a organização.

Dessa forma, a definição do saldo de caixa passou a ter uma abordagem quantitativa no intuito de promover a otimização deste estoque financeiro, de modo a minimizar os custos associados à manutenção ou falta de dinheiro em caixa. Posteriormente, Miller e Orr (1966) definem o saldo de caixa como tendo uma flutuação irregular, se caracterizando como uma variável aleatória e propõem um modelo estocástico para o gerenciamento do saldo de caixa.

Assim, entender os motivos que levam as organizações a possuir a necessidade de manter recursos em caixa é fundamental para uma melhor gestão financeira. Nesse sentido, Braley e Myers (2005) apontam quatro motivos para a manutenção do saldo de caixa:

1. Transações – recursos mantidos em caixa para honrar compromissos em vista do descompasso temporal entre as saídas (pagamentos) e as entradas (recebimentos) de dinheiro;
2. Precaução – recursos mantidos líquidos em caixa como manutenção de uma reserva de segurança para contingências;
3. Especulação – recursos mantidos em caixa para aproveitar oportunidades de obtenção de descontos ou aplicações favoráveis; e
4. Reciprocidade bancária – recursos mantidos em contas correntes para atender a exigências de alguns bancos como contraprestação.

Ainda assim, a definição da quantidade de dinheiro a ser mantida em caixa não é algo tão facilmente compreendida ou realizada. Outro fator de relevância na definição de políticas de gerenciamento do saldo de caixa depende de fatores restritivos.

No caso brasileiro, dados da Economática referentes ao período de 2004 a 2008 indicam que as empresas brasileiras (de atividade não financeira) com ações negociadas em bolsa, obtiveram um saldo médio ponderado de disponibilidades de 8,85% no período (Tabela 1).

Empresas brasileiras	2008	2007	2006	2005	2004
% Disponível (Médio)	9,10%	11,39%	9,22%	7,49%	6,75%
Desvio-padrão	15,81%	17,35%	16,27%	14,72%	13,87%
Quantidade Empresas	567	369	366	350	353

Tabela 1 – Participação das disponibilidades no total dos ativos – empresas brasileiras (elaborado pelo autor, Fonte: Economática).

Dessa forma, o trabalho busca apresentar um comparativo entre duas metodologias computacionais de determinação da política de gerenciamento de caixa, utilizando como base a estrutura do modelo proposto por Miller e Orr.

Com o intuito de atender ao problema proposto, tem-se como objetivo geral da pesquisa desenvolver uma política de gerenciamento do saldo disponível de caixa, com base nas premissas de minimização do custo, aplicando algoritmos genéticos (AG) e *particle swarm optimization* (PSO) e comparando os resultados com o tradicional modelo Miller-Orr.

Para alcançar o objetivo proposto a seguinte metodologia quantitativa é utilizada:

- Simular séries históricas de fluxos de caixa, com base em premissas observadas na literatura sobre o tema;
- Desenvolver o modelo de algoritmos genéticos e *particle swarm optimization* que tenham como função objetivo a minimização do custo de manutenção (custo de oportunidade) saldo de caixa e o custo de transferência do caixa para um investimento alternativo de alta liquidez, bem como o resgate deste investimento para o caixa;
- Realizar experimentações com os modelos desenvolvido nos fluxos de caixa e analisar comparativamente seus resultados, observando vantagens e perspectivas. Além disso, um algoritmo de otimização, que testa todas as possibilidades do limite mínimo de caixa, irá servir como base para verificar o nível de qualidade dos modelos em relação ao modelo Miller-Orr.

O presente trabalho tem seu foco na metodologia qualitativa de gestão financeira, para isso são utilizadas as técnicas de algoritmos genéticos e *particle swarm optimization* no desenvolvimento do modelo de gerenciamento de caixa, necessitando apresentar os conceitos aplicados ao problema abordado, bem como a metodologia proposta para sua elucidação. A seguir são apresentadas as teorias que dão suporte para este trabalho, primeiramente revisando os conceitos de gestão do saldo de caixa e na sequência os modelos de algoritmos genéticos e *particle swarm optimization*.

- Modelos de Administração de Caixa

Os modelos de administração de caixa tiveram sua origem no trabalho de Baumol (1952), nele o autor faz um paralelo entre o caixa com os demais estoques das empresas.

No caso dos estoques em geral a abordagem mais comum quando se necessita definir o reabastecimento do estoque é o lote econômico de compra (LEC), que vise encontrar o melhor posicionamento entre as vantagens e desvantagens de possuir estoque.

Apesar disso, o LEC possui restrições ao utilizar os pressupostos de demanda fixa e previsível, bem como entregas instantâneas quando da solicitação da reposição do estoque (SLACK et al., 1997).

Segundo Baumol (1952,) o estoque de caixa pode ser observado como um inventário de um meio de troca. Nesse modelo adaptado do LEC para otimização de caixa a configuração ótima é obtida em função da relação entre o custo de oportunidade e o custo de transação. No modelo o custo de transação aumentam quando a empresa precisa vender títulos para acumular caixa, já os custos de oportunidade crescem com a existência do saldo de caixa, pois é uma aplicação que não possui rendimento (ROSS; WESTERFIELD; JAFFE, 2002).

O modelo efetua a análise do custo associado à manutenção de dinheiro em caixa, ou seja, o custo de oportunidade determinado pelos juros que a empresa deixa de receber ao não aplicar os recursos, e do custo de obtenção do dinheiro pela conversão dos investimentos em caixa (ROSS; WESTERFIELD; JAFFE, 2002). Já o custo de transação representa o dispêndio incorrido na aplicação ou resgate dos recursos financeiros, como taxas e impostos incidentes.

Posteriormente, Miller e Orr (1966) apresentam a um modelo que atende a aleatoriedade dos fluxos de caixa, apesar de ainda considerar a existência de apenas dois ativos, caixa e investimento, sendo este último representa uma opção de baixo risco e alta liquidez (Figura 1).

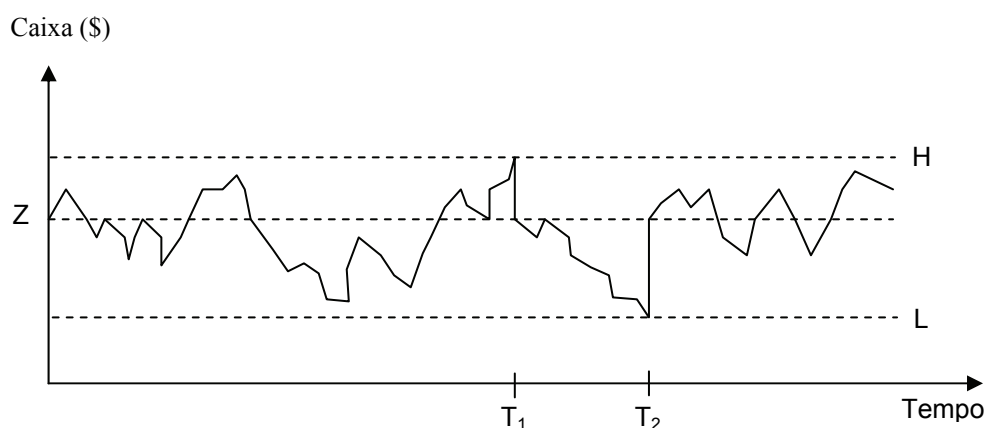


Figura 1 – Variação dos fluxos de caixa, adaptado (MILLER; ORR, 1966).

Neste modelo procura-se definir dois limites para o nível de recursos em caixa: o mínimo e o máximo, de tal forma que, ao se atingir o nível máximo (momento T1), representado pelo limite superior (H), efetua-se aplicação de recursos, em valor que proporcione o saldo de caixa voltar ao nível ideal de caixa (Z). E ao atingir o nível mínimo (momento T2) no limite inferior (L) deve ser efetuado um resgate, para obter o nível ótimo de caixa novamente (ROSS; WESTERFIELD; JAFFE, 2002).

Assim, ao trabalhar os fluxos líquidos de caixa (entradas menos saídas) o modelo Miller-Orr possibilita a otimização do caixa, com base nos custos de transação (representados por F) e oportunidade (representados por K), obtendo-se a seguinte formulação (ROSS; WESTERFIELD; JAFFE, 2002):

$$Z^* = \sqrt[3]{3F\sigma^2 / 4K + L}$$

Sendo que o “*” denota valores ótimos e σ^2 é a variância dos fluxos líquidos de caixa. Mesmo com o ganho em relação ao modelo de Baumol, por considerar a aleatoriedade dos fluxos de caixa, o modelo Miller-Orr pressupõe a definição do limite inferior (L), ou seja, o risco de falta de caixa, associado a uma margem mínima de segurança, depende de uma escolha da administração e não é tratado no modelo.

Neste ponto recai o problema abordado neste trabalho, uma vez que o modelo Miller-Orr não define por si só o limite inferior, cabe a utilização do algoritmo de otimização neste problema de definição do limite inferior ótimo (L^*), testando todas as possibilidades de L, com duas casas decimais, que sejam capazes de minimizar o custo.

Posteriormente, a maioria dos trabalhos desenvolvidos utilizam os mesmos pressupostos dos modelos originais, principalmente de Miller-Orr, se diferenciando por uma modelagem estocástica do problema, como nos trabalhos desenvolvidos por Tapiero e Zuckerman (1980), Milbourne (1983), Hinderer e Waldman (2001), Baccarin (2002), Premachandra (2004), Volosov et al (2005), Liu e Xin (2008) e Baccarin (2009).

Poucos trabalhos utilizam uma metodologia computacional para resolução do problema, como a proposta de Yao, Chen e Lu (2006) que aborda sistemas *fuzzy*, bem como Gormley e Meade (2007) na utilização de algoritmos genéticos, não sendo observada na literatura a aplicação de PSO neste tipo de problema.

- Algoritmos Genéticos e *Particle Swarm Optimization*

A computação evolutiva tem sua origem no estudo da teoria de evolução natural, sendo modelos de algoritmos que buscam atingir funções objetivos definidas, para isso, partem de possibilidades de resolução aleatórias e de acordo com seu algoritmo de desenvolvimento evoluem no sentido de obter melhores resultados na busca do objetivo estabelecido (REZENDE, 2005).

Para se tornarem úteis, os algoritmos tradicionais de descoberta das soluções mais apropriadas, ou algoritmos de otimização, utilizam uma série de suposições ou hipóteses sobre como avaliar a aptidão de uma solução. Outra forma tradicional de otimização, baseada em gradientes-descendentes depende da ocorrência de baixas oscilações no problema sob pena de obter uma otimização local e não global.

Mas os algoritmos evolutivos não dependem deste tipo de premissa. Fundamentalmente, a medição de performance deve ser capaz apenas de ordenar duas soluções comparativas e determinar aquela, que de alguma forma, é melhor que a outra (FOLEY, 2000).

Nos algoritmos genéticos (Figura 2) a população é um conjunto de possíveis soluções ao problema determinado, sendo cada indivíduo dessa população com uma estrutura semelhante aos cromossomos.

Algoritmo AG (Algoritmo Genético)

```

1:  T = 0;
2:  Gerar População Inicial  $P(0)$ ;
3:  para todo cada indivíduo  $i$  da população atual  $P(t)$  faça
4:    Avaliar aptidão do indivíduo  $i$ ;
5:  fim para
6:  enquanto Critério de parada não for satisfeito faça
7:     $t = t + 1$ ;
8:    Selecionar população  $P(t)$  a partir de  $P(t-1)$ ;
9:    Aplicar operadores de cruzamento sobre  $P(t)$ ;
10:   Aplicar operadores de mutação sobre  $P(t)$ ;
11:   Avaliar  $P(t)$ ;
12:  fim enquanto

```

Figura 2 – Diagrama geral do ciclo de vida de um algoritmo genético (REZENDE, 2005).

A possibilidade de sobrevivência de cada indivíduo é avaliada por uma função custo, função esta a ser otimizada, sendo o resultado desta função a aptidão de cada indivíduo como melhor resultado ao problema, funcionando de forma de seleção para reprodução. Finalmente a evolução é propiciada pela aplicação de operadores genéticos como seleção, cruzamento e mutação (MARTINEZ et al., 2009).

Os operadores de seleção buscam averiguar o quão apto cada indivíduo está, para ser considerado a melhor solução ao problema encontrado, depois disso, os indivíduos são cruzados, ou seja, pela junção de partes de cada um dos indivíduos aptos é formada uma nova população de indivíduos e, eventualmente, alguns destes indivíduos sofrem alterações aleatórias de mutação, segundo uma determinada probabilidade de ocorrência.

Já o modelo de *particle swarm optimization* é mais recente, e se difere dos algoritmos genéticos pelo fato de que cada possível solução (partícula) possui uma velocidade aleatória, flutuando pelo hiperespaço, assim, cada partícula do enxame é avaliada por uma função de aptidão, sendo armazenada a melhor solução da partícula, chamada de *pbest*, assim como também é armazenada a melhor solução global, *gbest* (EBERHART; KENNEDY, 1995).

Assim, a partir da posição atual da partícula (x_i) que corresponde à solução atual, sua velocidade atual (v_i), sua melhor posição passada ($pbest_i$) e da melhor posição global de todas as partículas do enxame ($gbest$), cada partícula é atualizada iterativamente (Figura 3) de acordo os atributos anteriores (TSAI et al., 2010).

Algoritmo PSO (*Particle Swarm Optimization*)

```

1:  Procedimento - função objetivo ( $f$ )
2:  Inicializar o enxame de  $m$  partículas
3:  enquanto o critério de parada não seja satisfeito faça
4:    Avaliar cada partícula
5:    para partícula  $i, i = 1, 2, \dots, m$  faça (atualizar as melhores posições)
6:      se  $f(x_i) < f(pbest_i)$  então
7:         $pbest_i = x_i$ 
8:      se  $f(pbest_i) < f(gbest)$  então
9:         $gbest = pbest_i$ 
10:     fim se
11:   fim se
12:  fim para
13:  para partícula  $i, i = 1, 2, \dots, m$  faça (gerar a próxima geração)
14:     $v_i(t+1) = \omega v_i(t) + c_1 r_1 (pbest_i - x_i) + c_2 r_2 (gbest - x_i)$ 
15:     $x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1)$ 
16:  fim para
17: fim enquanto
18: fim procedimento

```

Figura 3 – Algoritmo *particle swarm optimization* (Adaptado CHEN; JIANG, 2010).

Existem implicações no resultado final dos modelos de acordo com os parâmetros e técnicas destes operadores, no caso do AG a função de seleção, que ordena os indivíduos mais aptos, garante que as melhores alternativas encontradas ao problema sejam sempre mantidas, já no PSO a função de inércia, que mantém a solução em seu caminho original, bem como o comportamento social e cognitivo, que buscam encaminhar a solução em direção dos melhores resultados já obtidos, possibilitando sua evolução e convergência em busca do resultado ótimo.

Metodologia

A metodologia deste trabalho está voltada ao desenvolvimento de modelos de AG e PSO que sejam capazes de buscar a definição dos três parâmetros de uma política de gerenciamento de caixa: o nível ideal de caixa (Z), o limite superior (H) e o limite inferior (L).

Nesse sentido, é necessário o desenvolvimento de experimentações em diferentes cenários para obtenção de séries de fluxos líquidos de caixa que possibilitem a validação dos modelos desenvolvidos.

No caso específico do problema abordado, autores já apresentados destacam a o saldo de caixa como uma variável aleatória com distribuição normal. Desta forma, para o experimento foram utilizados parâmetros de média e desvio-padrão das amostras em três diferentes níveis (baixo, intermediário e alto) definidos empiricamente.

Assim, totalizando 9 classes de problema, sendo que para cada classe de problema foram geradas aleatoriamente 100 amostras, chamadas de "Problemas" com 500 valores cada (Tabela 2), posteriormente todos os problemas (900 amostras de 500 valores cada) foram testados quanto a distribuição normal por meio do Teste Chi-Quadrado (X^2) e Kolmogorov-

Smirnof (KS), com um nível de significância de 95%, sendo aquelas que não atenderam ao preceito de normalidade substituídas antes da experimentação.

Geração de Números Aleatórios	Média	Desvio-Padrão
Classe 1	1.000	500
Classe 2	1.000	5.000
Classe 3	1.000	50.000
Classe 4	20.000	500
Classe 5	20.000	5.000
Classe 6	20.000	50.000
Classe 7	100.000	500
Classe 8	100.000	5.000
Classe 9	100.000	50.000

Tabela 2 – Geração de números aleatórios

O objetivo foi validar o modelo de acordo com fluxos com médias e variâncias distintas, obtendo fluxos com maior ou menor probabilidade de apresentarem valores negativos no saldo líquido de caixa.

Inicialmente foi aplicado um algoritmo de otimização, utilizando o modelo Miller-Orr, alterando o limite inferior de caixa (L), a fim de obter o menor custo. A variável L foi definida empiricamente entre \$0,00 e \$50.000,00.

Considerando a variação L em \$0,01, com duas casas decimais, totalizando 5.000.000 de valores possível, obtém-se o valor de L que proporciona o menor custo pelo modelo Miller-Orr.

Assim, os modelos AG e PSO foram aplicados aos problemas, sendo programados para minimizar o custo do caixa com base na definição dos parâmetros Z, H e L simultaneamente.

O desenvolvimento dos algoritmos considerou os seguintes aspectos:

- Saldo inicial de caixa: todas as séries de saldos de caixa partiram de um saldo inicial de \$10.000,00, somado a cada momento com o valor gerado na série de fluxos de caixa. A determinação de um saldo inicial fixo não interfere na relevância dos fluxos, pois é ajustado logo após o cálculo do primeiro fluxo de caixa;
- O custo de transferência (F) foi definido em \$100,00 por operação, seja ela de investimento (saída de caixa para o investimento) quando o saldo atinge o limite superior, ou desinvestimento (saída do investimento para o caixa) quando o saldo atinge o limite mínimo estabelecido;
- O custo de oportunidade, assumido pelo custo financeiro de obter caixa quando ocorrer ruptura de caixa, tendo a organização obtido recurso emprestado, como 0,0261158% ao dia sobre este valor, taxa equivalente a 10% ao ano;
- Os valores do saldo ideal de caixa (Z), limite superior (H) e limite inferior (L) a serem definidos pelos algoritmos AG e PSO devem estar em um espaço amostral entre \$0 e

\$300.000, definido empiricamente, com base nos resultados obtidos pela experimentação do algoritmo de otimização no modelo Miller-Orr;

- Foram gerados 100 indivíduos cada valor resposta (Z, H e L) em cada experimento, com 500 iterações para cada (AG e PSO) com a obtenção do Custo relativo a cada momento e do Custo Total do fluxo de caixa;
- Após 10 interações (1.000 soluções para Z, H e L) sem redução do custo o algoritmo era encerrado, considerando o tempo como um fator de eficiência também.

Para o AG foram definidos os parâmetros:

- Valores: binários, transformados a partir das séries de saldo de caixa, utilizando 48 bits (equivalente a 6 casas numéricas);
- Cruzamento: método da roleta entre 2 pais gerando 2 filhos, com 70% de chance de ocorrência;
- Mutação: taxa de mutação de 1%, alterando um bit aleatório.

Para o PSO foram definidos os parâmetros:

- Valores: nominais, dos fluxos de caixa gerados;
- Taxa de Inércia: 10%;
- Taxa de Aprendizado: ótimo local (comportamento cognitivo) e ótimo global (comportamento social) em 20% cada.

A fim de possibilitar um melhor resultado na definição do parâmetro LM, como tanto AG quanto PSO utilizam componentes aleatórios, em cada problema foram realizados 10 vezes o experimento, sendo mantido para fins comparativos o melhor resultado. Assim, foram realizadas 9000 experimentações com o AG e 9000 experimentações com o PSO.

Os parâmetros utilizados nesta metodologia foram atribuídos de maneira empírica, visando à observação da composição do resultado dos valores de Z, H e L, pois não foram observadas referências que pudessem basear a forma de estruturação do referido problema.

Para efeito comparativo foi desenvolvido algoritmo de otimização, que altera apenas o valor de L de \$0 até \$50.000, em valores com duas casas decimais, calculando para cada L o Custo Total em cada um dos 900 problemas de acordo com o modelo Miller-Orr.

Os algoritmos foram desenvolvidos em MATLAB® 2009 e utilizados em um computador com processador Core2Quad Q8300 com 2,5GHz e 4GB de memória RAM, utilizando Windows 7™ 64 Bits.

A seguir os resultados são apresentados e analisados.

Resultados e análise

Os resultados obtidos com a função de minimizar o Custo Total de manutenção do caixa, com base no limite inferior (L) a partir do modelo Miller-Orr são apresentados no Algoritmo Ótimo.

Já os resultados utilizando os modelos AG e PSO, com os valores médios calculados sobre os 100 problemas utilizados na experimentação em cada classe de problema, demonstrando o custo do caixa, a iteração em que o menor custo foi obtido e o tempo computacional em segundos para sua obtenção.

Assim, são apresentados na Tabela 3 os resultados comparativos médios de cada classe de problema.

Classe de Problema	Algoritmo Ótimo Miller-Orr		Algoritmo AG			Algoritmo PSO		
	Custo	Tempo	Custo	Iteração	Tempo	Custo	Iteração	Tempo
1	4.638,63	196,04	3.932,32	18,88	2,88	3.839,03	131,44	23,54
2	5.346,83	196,25	5.294,23	4,20	3,03	4.568,75	123,24	23,46
3	20.740,28	196,51	19.170,62	48,55	2,93	18.315,77	150,22	23,34
4	18.895,27	189,63	15.079,21	13,07	2,89	14.997,96	70,78	23,24
5	19.694,68	196,09	14.992,53	8,33	2,88	14.880,98	118,48	23,52
6	24.517,72	200,66	20.166,89	13,80	2,97	19.444,35	164,92	23,60
7	36.110,19	178,35	29.800,56	3,10	2,84	29.817,45	17,06	23,28
8	37.227,33	182,92	29.813,75	13,41	2,92	29.812,04	41,68	23,36
9	40.346,49	194,90	28.990,28	13,61	3,02	28.829,36	92,06	23,91

Tabela 3– Resultados comparativos médios por grupos entre Algoritmo Ótimo, AG e PSO

Os resultados obtidos demonstram que é possível aos dois algoritmos computacionais evolutivos (AG e PSO) determinar a política de gerenciamento de caixa com os parâmetros Z, H e L com menores custos que o modelo Miller-Orr otimizado em sua variável L.

Observa-se que o algoritmo AG é quase 10 vezes mais rápido que o algoritmo PSO, porém, ambos são significativamente mais rápidos que o algoritmo ótimo aplicado ao modelo Miller-Orr, uma vez que este é um algoritmo de tentativa e erro.

Comparando o custo do caixa, obtido pelos algoritmos AG e PSO, em relação ao modelo Miller-Orr, pode-se verificar uma redução média do custo de 21,30% para o algoritmo AG e 24,68% no algoritmo PSO, conforme Tabela 4.

Classe de Problema	Algoritmo AG		Algoritmo PSO	
	Redução Custo	Var %	Redução Custo	Var %
1	706,30	18,60%	799,60	21,28%
2	52,60	1,28%	778,07	17,08%
3	1.569,66	8,24%	2.424,52	13,28%
4	3.816,06	25,33%	3.897,31	26,00%
5	4.702,15	31,38%	4.813,70	32,36%
6	4.350,83	21,65%	5.073,37	26,15%
7	6.309,63	21,17%	6.292,74	21,11%
8	7.413,58	24,87%	7.415,29	24,87%
9	11.356,21	39,18%	11.517,13	39,96%
Geral		21,30%		24,68%

Tabela 4– Resultados comparativos de redução de custos em AG e PSO em relação ao modelo Miller-Orr

Nota-se que o algoritmo PSO obteve uma maior redução de custos em relação ao algoritmo AG, principalmente nas classes de problemas 1, 2 e 3, correspondentes as menores médias de fluxos de caixa (média = \$1.000 nestas classes), indicando maior possibilidade de fluxos de caixa negativos.

Dessa forma, nos casos de empresas com fluxos de caixa com menores médias e maiores oscilações (desvio-padrão), como são os casos das classes 2 e 3, o algoritmo AG não obteve ganhos significativos em relação ao modelo Miller-Orr otimizado.

Assim, o desvio relativo médio (DRM) entre cada algoritmo (Miller-Orr, AG e PSO) e a melhor solução para a política de gerenciamento de caixa (aquela com menor custo), proporciona uma visão sobre o algoritmo mais eficiente. Além disso, é considerada a quantidade de vezes em que cada algoritmo apresenta a melhor solução, indicando aquele que apresenta maior eficácia para os 900 problemas, conforme Tabela 5.

Classe de Problema	DRM	DRM	DRM	Melhor Solução	
	Algoritmo Ótimo Miller-Orr	Algoritmo AG	Algoritmo PSO	Ganho AG	Ganho PSO
1	24,74%	5,54%	3,04%	42,00%	58,00%
2	17,09%	15,94%	0,00%	0,00%	100,00%
3	13,28%	4,68%	0,00%	0,00%	100,00%
4	26,47%	0,93%	0,38%	43,00%	57,00%
5	32,68%	0,99%	0,24%	31,00%	69,00%
6	26,15%	3,73%	0,00%	0,00%	100,00%
7	21,37%	0,16%	0,22%	55,00%	45,00%
8	25,11%	0,20%	0,19%	54,00%	46,00%
9	40,09%	0,66%	0,09%	25,00%	75,00%
Geral	25,22%	3,65%	0,46%	27,78%	72,22%

Tabela 5– Resultados comparativos de DRM e Melhor Solução

Analisando a Tabela 5 é possível observar que o algoritmo PSO tem o menor Desvio Relativo Médio geral, perdendo apenas na classe 7 de problemas. Além disso, o algoritmo PSO obtém a melhor solução em 72,22% das vezes, sendo que nas classes 2, 3 e 6 de problemas obteve o melhor resultado em 100% das vezes em comparação ao algoritmo AG.

Posteriormente foi aplicado o Teste T para duas amostras presumindo variâncias equivalentes, a fim de verificar se os custos de caixa obtidos pelos algoritmos são significativamente distintos, a 5% de probabilidade, indicando que os custos obtidos com os algoritmos AG e PSO apresentam as mesmas características de distribuição em mais de 99% (Tabela 6).

Teste-t: duas amostras presumindo variâncias equivalentes	AG	PSO
Média	18582,2654	23060,50526
Variância	86859400,32	151313595
Observações	900	900
Stat t	-8,705272018	
P(T<=t) bi-caudal (nível descritivo)	7,03163e-18	
t crítico bi-caudal	1,961284203	

Tabela 4– Resultados comparativos de redução de custos em AG e PSO em relação ao modelo Miller-Orr

Dessa forma, apesar dos melhores resultados do algoritmo PSO, os custos obtidos não são significativamente diferentes do algoritmo AG, com um nível descritivo de 7,03163e-18. Já na comparação entre o algoritmo PSO e o algoritmo ótimo no modelo Miller-Orr, o nível descritivo obtido é de 0,995853067, demonstrando que os custos são significativamente diferentes.

Conclusão

Os algoritmos genéticos e *particle swarm optimization* têm se demonstrado ferramentas úteis na aplicação deste tipo de problema de otimização. Ao auxiliarem na definição de parâmetros para o gerenciamento do saldo de caixa, pode-se encontrar com maior imparcialidade os valores ideais para o gerenciamento de caixa.

Os resultados apontam para uma área promissora, ainda assim, maiores estudos e experimentos são necessários, uma vez que os resultados não puderam ser comparados com outros modelos, assim, demanda-se um estudo mais aprofundado com a comparação com os modelos de definição do saldo de caixa.

A análise demonstra que o algoritmo PSO obtém menores custos, com maior eficiência (DRM) e eficácia (maior número de acertos), porém não sendo significativamente diferentes entre si. Já em relação ao tempo computacional, o algoritmo AG apresentou um tempo médio de 2,93 segundos por problema, enquanto o algoritmo PSO teve um tempo médio de 23,47 segundos.

Considerando que cada problema seria uma empresa, apesar do tempo computacional médio do algoritmo PSO ser muito superior, uma diferença de 20 segundos para obter a política de gerenciamento de caixa da empresa não seria algo problemático.

Na prática, os dois tipos de algoritmos se apresentam como solução prática na definição de uma política de gerenciamento do saldo de caixa, obtendo ganhos significativos em relação aos custos e tempos obtidos pelo modelo Miller-Orr otimizado.

O estudo limita-se a definição da política de gerenciamento do saldo de caixa, com as variáveis para o caixa ideal (Z), limite superior (H) e limite inferior (LM), porém os modelos de AG e PSO podem ser aplicados para a definição de toda a política de caixa mais complexas, considerando outros tipos de investimentos e custos diferenciados na aplicação e resgate dos investimentos.

Ainda assim, com estas diversificações não seria possível a aplicação de um algoritmo de controle como foi feito neste estudo, uma vez que o tempo computacional da definição de três parâmetros simultaneamente seria proibitivo, daí a grande relevância deste estudo, em apresentar resultados que demonstram que os algoritmos AG e PSO podem ser empregados em modelos mais sofisticados para o problema de gerenciamento de caixa, com indicativos de obter soluções práticas aceitáveis.

Referências

BACCARIN, S. Optimal impulse control for cash management with quadratic holding-penalty costs. *Decision in Economics and Finance*, v. 25, p. 19-32, 2002.

BACCARIN, S. Optimal impulse control for a multidimensional cash management system with generalized cost functions. *European Journal of Operational Research*, v. 196, p. 198-206, 2009.

BAUMOL, W. The transaction demand for cash-an inventory theoretic approach. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 66, p. 545-556, 1952.

BREALEY, R. A.; MYERS, S. C. **Princípios de Finanças Empresariais**. Lisboa: McGraw-Hill, 5a. Ed., 1240 p., 2005.

CHEN, Y.-P.; JIANG, P. Analysis of particle interaction in particle swarm optimization. **Theoretical Computer Science**, v. 411, p. 2101-2115, 2010.

EBERHART, R. C.; KENNEDY, J. A new optimizer using particle swarm theory. **Sixth international symposium on micro machine and human science**, Nagoya, Japão, 1995.

FOGEL, D. B. What is evolutionary computation? **IEEE Spectrum**, p. 26-32, 2000.

GORMLEY, F. M.; MEADE, N. The utility of cash flow forecasts in the management of corporate cash balances. **European Journal of Operational Research**, v. 182, p. 923-935, 2007.

HINDERER, K.; WALDMANN, K.-H. Cash management in randomly varying environment. **European Journal of Operational Research**, v. 130, p. 468-485, 2001.

LIU, B; XIN, C. An Online Model for Managing Cash: An Alternative Approach to the Miller-Orr Model. **Fourth International Conference on Natural Computation – IEEE Computer Society**, 2008.

- MARTINEZ, M.; GARCÍA-NIETO, S.; SANCHIS, J.; BLASCO, X. Genetic algorithms optimization for normalized normal constraint method under Pareto construction. **Advances in Engineering Software**, v. 40, p. 260-267, 2009.
- MILBOURNE, R. Optimal Money Holding under Uncertainty. **International Economic Review**, v. 24, n. 3, p. 685-698, 1983.
- MILLER, M.; ORR, D. A model of the demand for money by firms. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 81, p. 413-435, 1966.
- PREMACHANDRA, I. M. A diffusion approximation model for managing cash in firms: An alternative approach to the Miller-Orr model. **European Journal of Operational Research**, v. 157, p. 218-226, 2004.
- REZENDE, S. O. (Organizador). **Sistemas Inteligentes – Fundamentos e Aplicações**. São Paulo: Ed. Manole, 525 p., 2005.
- ROSS, S. A.; WESTERFIELD, R. W.; JAFFE, J. F. **Administração Financeira – Corporate Finance**. São Paulo: Ed. Atlas, 776 p., 2002.
- SLACK, N.; CHAMBERS, S.; HARLAND, C.; HARRISON, A.; JOHNSTON, R. **Administração da Produção**. São Paulo: Ed. Atlas, 726 p., 1997.
- SRINIVASAN, V.; KIM, Y. H. Deterministic Cash Flow Management: State of Art and Research Directions. **OMEGA – International Journal of Management Sciences**, v. 14, n. 2, p. 145-166, 1986.
- TAPIERO, C. S.; ZUCKERMAN, D. A Note on the Optimal Control of a Cash Balance Problem. **Journal of Banking and Finance**, v. 4, p. 345-352, 1980.
- TOBIN, J. The interest elasticity of the transaction demand for cash. **The Review of Economic Statistics**, v. 38, p. 241-247, 1956.
- TSAI, S.-J.; SUN, T.-Y.; LIU, C.-C.; HSIEH, S.-T.; WU, W.-C.; CHIU, S.-Y. An improved multi-objective particle swarm optimizer for multi-objective problems. **Expert Systems with Applications**, v. 37, p. 5872-5886, 2010.
- VOLOSOV, K.; MITRA, G.; SPAGNOLO, F.; CARISMA, C. L. Treasury Management Model with Foreign Exchange Exposure. **Computational Optimization and Applications**, v. 39, p. 179-207, 2005.
- YAO, J.-S.; CHEN, M.-S.; LU, H.-F. A fuzzy stochastic single-period model for cash management. **European Journal of Operational Research**, v. 170, p. 72-90, 2006.