

APREÇAMENTO DE OPÇÕES MODELO BINOMIAL FUZZY: UMA INTRODUÇÃO AOS ASPECTOS DA METODOLOGIA

Autoria: Alcides Carlos de Araujo

RESUMO

Entre os anos de 1973 e 1979 foram publicados importantes textos na área de apreçamento de opções, a partir deste período diversas inovações foram desenvolvidas na área; diante disto, novos métodos emergiram. Antes disto, Lofti Zadeh (1965) publica um conjunto de propriedades matemáticas aplicados a intervalos em que recebeu a nomenclatura de lógica nebulosa (*fuzzy logic*); destes textos foram derivados conceitos como números *fuzzy* e funções de pertinência e um grande quantidade de aplicações nas mais diversas ciências. A partir destas temáticas, o objetivo deste artigo é estudar o apreçamento de opções através da lógica *fuzzy* ou nebulosa. O trabalho se torna importante pelas seguintes justificativas: dado a incerteza presente no mercado de capitais, os investidores necessitam lidar com dois problemas, os efeitos aleatórios e a imprecisão das estimativas; os efeitos aleatórios são tratados naturalmente pelos modelos probabilísticos; contudo, a imprecisão das estimativas ainda é problemática. Chrysafis e Papadopoulos (2009), por exemplo, apresentam algumas das limitações da estimação de intervalos de confiança nos modelos estatísticos de apreçamento. Oliveira (2008) levantou a necessidade de complementar as técnicas probabilísticas (Black-Scholes) quanto ao aspecto da imprecisão através da lógica *fuzzy*; principalmente, para aplicar os resultados em análises de investimentos e opções reais. Oliveira e Montini (2009) comentam sobre a necessidade de envolvimento de mais pesquisadores que abordem o estudo, principalmente para execução de estudos de casos. Mediante as justificativas, foi realizado um exemplo numérico (para melhor entendimento da metodologia) baseado no artigo de Eslami (2007) e um estudo de caso com ativo do mercado de opções do Brasil para verificar a aplicabilidade do modelo. Como resultados, árvores binomiais clássicas e *fuzzy* com os respectivos preços das opções foram construídas; a transformação das entradas das taxas de evolução dos preços dos preços em números nebulosos adicionou melhores definições técnicas ao modelo. Apesar disto, ainda percebe-se necessidades de melhoramentos no modelo; dado que o método é mais trabalhoso em relação ao modelo clássico, a criação dos intervalos para geração dos números *fuzzy* dependendo do grau de pessimismo dos avaliadores poderão criar amplitudes nos dados de entrada muito distantes entre os preços. Lazo (2004) ainda cita que tais operações baseadas em aritméticas de intervalos possuem problemas em que os domínios dos valores *fuzzy* tendem a crescer de forma “explosiva” em cálculos sucessivos. Para trabalhos futuros recomenda-se uma expansão do tema; como, por exemplo, demonstrar o cálculo de preço de uma opção de venda (*Put*); explicar o processo para um número maior de passos na árvore; além de trabalhos comparativos entre o método com painel de especialistas e intervalos de confiança.

INTRODUÇÃO

O célebre trabalho de Fisher Black e Myron Scholes em 1973 trouxe mudanças significativas no tratamento das opções; após o trabalho dos autores, diversos estudos na área de apreçamento de derivativos foram implementados, uma das evoluções foi publicada no artigo de Cox *et al* (1979) – a precificação por árvores binomiais. Mediante as inovações existentes na área, novos métodos tendem a emergir; no presente artigo, o foco será a precificações de opções através de lógica *fuzzy* ou nebulosa.

Segundo Camargos (2002) a lógica nebulosa foi descrita e examinada por quase trinta anos, contudo, somente na década de 90 que obteve maior destaque. Ao observar a figura 1, apresentada em Cox (1999), percebe-se o início da difusão em 1965 com Loft Zadeh, o forte crescimento durante os anos de 1986 e 1987, principalmente pela inauguração do metrô Sendai em Tóquio com seu sistema de controle baseado na lógica nebulosa e, certo declínio por volta dos anos de 1993 a 1994. Atualmente, diversos produtos comerciais são automatizados através da lógica *fuzzy*, como elevadores, máquinas de lavar e geladeiras.

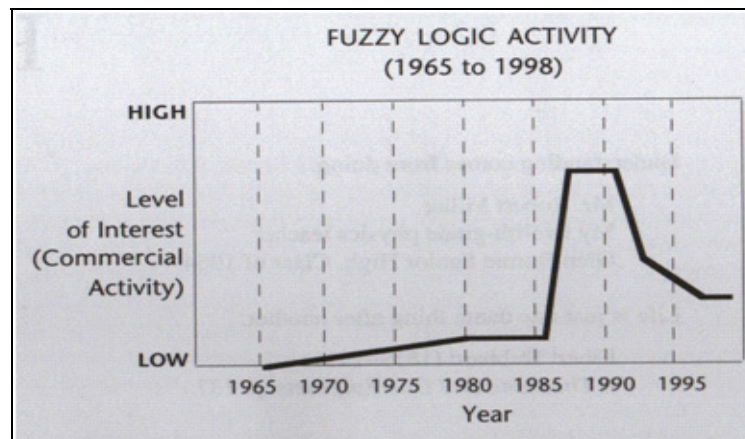


Figura 1 – Atividade da lógica nebulosa
Fonte: Cox (1999) *apud* Camargos (2002), p. 3

Mediante a importância da lógica nebulosa na atualidade, o tema expandiu-se para diversas áreas de estudos, uma delas a área financeira; dentro deste campo é possível citar trabalhos como os de Antunes (2006) – avaliação de riscos na auditoria, Bojadziev e Bojadziev (2007) – tolerância ao risco de crédito e Oliveira (2008) – VPL *fuzzy*. O presente artigo possui o objetivo de apresentar o modelo de precificação de opções modelo binomial através da lógica nebulosa.

Dado a incerteza presente no mercado de capitais, os investidores necessitam lidar com dois importantes conceitos, os efeitos aleatórios e a imprecisão; quanto aos efeitos aleatórios, os modelos probabilísticos conseguem tratá-los com eficiência, sendo assim, bastante difundidos no mercado. Entretanto, no caso da imprecisão, os modelos estatísticos parecem tratar com negligência.

No artigo de Chrysafis e Papadopoulos (2009), por exemplo, apresentam algumas das limitações da estimação de intervalos de confiança nos modelos estatísticos, como os próprios autores afirmaram: “*the disadvantage of confidence intervals is that we have to choose the probability so that the parameter for estimation should be in this interval*”; percebe-se a própria imprecisão diante da necessidade de escolher níveis de significância como 1%, 5% e 10%. Deste modo, os autores defendem a utilização dos intervalos de confiança para construir números *fuzzy*.

Oliveira (2008) que desenvolveu um trabalho para aplicar lógica *fuzzy* no cálculo do Valor Presente Líquido, também levantou a necessidade de escrever artigos que abordam a precificação de opções por números nebulosos. Segundo o autor, os modelos convencionais como o de Black-Scholes utilizam a estatística para representar a variabilidade do ativo, contudo, a utilização de números *fuzzy* podem complementar o modelo por incorporar o aspecto da imprecisão.

Oliveira e Montini (2009) apresentam um artigo que contempla a integração de métodos financeiros e lógica *fuzzy*, mais especificamente, uma aplicação ao modelo CAPM; entretanto os autores comentam sobre a necessidade de envolvimento de mais pesquisadores que abordem o estudo, principalmente para execução de estudos de casos.

Diante das justificativas, o objetivo deste artigo é apresentar utilização de números nebulosos aplicados a métodos financeiros, mais especificamente na tarefa de apreçar opções de ações; assim como propôs Oliveira (2008). O modelo binomial foi escolhido devido a facilidade de entendimento e viabilidade de apresentação dos preços *fuzzy* por árvores binomiais. Nos próximos tópicos serão abordados os principais conceitos da lógica *fuzzy*, o modelo binomial de Cox *et al* (1979) e o modelo de precificação por números nebulosos; exemplos numéricos foram implementados para complementar o entendimento do artigo.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A breve revisão, dado a vasta literatura existente sobre opções, a ser descrita no artigo possui o objetivo de elucidar os principais conceitos quanto a lógica *fuzzy*, o modelo binomial de Cox *et al* (1979) e o modelo binomial *fuzzy*.

2.1 Números *Fuzzy*

A lógica *fuzzy* possui como principal agente de difusão o professor Loft Zadeh, com o trabalho *Fuzzy sets*; no trabalho, Zadeh (1965) apresenta as diversas propriedades matemáticas (por exemplo, união, intersecção e complemento) presentes na lógica nebulosa. A respectiva revisão possui o objetivo de descrever alguns dos principais conceitos, como: funções de pertinência, tipos de números *fuzzy*, as operações básicas e alguns métodos de “defuzzificação”.

Em relação sobre o conceito de conjuntos nebulosos, pode-se verificar em Bojadziej e Bojadziej (2007) como um grupo de pares ordenados (binários) definidos pela relação $A = \{ [x, \mu_A(x) \mid x \in A, \mu_A(x) \in (0, 1)] \}$. Nesta definição, encontra-se a função $\mu_A(x)$ – denominada função de pertinência (*membership function*) – utilizada para especificar o grau que algum elemento x faz parte do grupo nebuloso A ; quanto maior o valor de $\mu_A(x)$ mais alto é o grau de adequação (*membership grade*) de x ao grupo, sendo o intervalo entre [0; 1].

No exemplo a seguir, retirado de Bojadziej e Bojadziej (2007), demonstra-se a relação entre os pares ordenados e o valor da função de pertinência; como se percebe, o conjunto *fuzzy* A é visualizado na relação (1) abaixo:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} [(1, 2), 0]; [(1, 2), 0,1]; [(1, 2), 0,2]; \\ [(2, 2), 0,7]; [(2, 2), 0,2]; [(2, 2), 0,3]; \\ [(3, 2), 1]; [(3, 2), 0,6]; [(3, 2), 0,2]. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Deste modo, observam-se cada par ordenado associado ao grau de pertinência no presente grupo; neste caso, os valores $[(x_i, y_i), 1]$ possuem o maior grau de associação e os

números $[(x_i, y_i), 0]$ ao menor grau. Os valores também podem ser resumidos numa tabela, como é observado a seguir.

Tabela 1 – Conjunto *fuzzy*

x_i	y_i	y_1	y_2	y_3
x_1		0	0,1	0,2
x_2		0,7	0,2	0,3
x_3		1	0,6	0,2

Fonte: Bojadziev e Bojadziev (2007), p. 27

Dado as características dos pares ordenados associados ao grau de pertinência, o conjunto *fuzzy* pode ser representado por um valor chamado número *fuzzy*; o respectivo número pode assumir algumas formas geométricas como triângulos ou trapézios, desde que sejam respeitadas as propriedades de convexidade e normalidade (ZADEH, 1965; BOJADZIEV; BOJADZIEV, 2007; OLIVEIRA, 2008). Na figura 2 pode ser visualizado um número *fuzzy* em forma de triângulo.

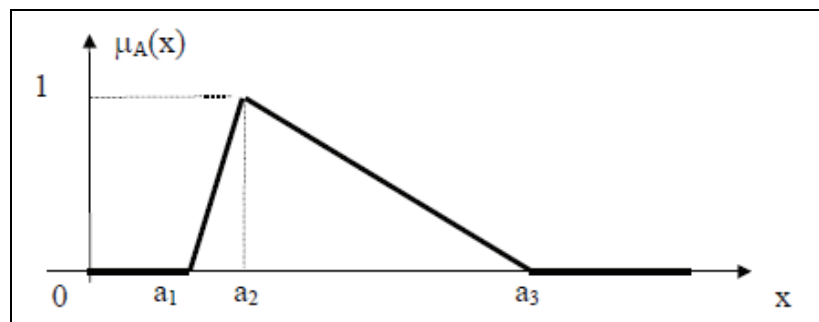


Figura 2 – Número *fuzzy* triangular

Fonte: Pinho *et al* (1997), p. 2

Em formato de função de pertinência, os números podem ser representados na relação 2 abaixo:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \text{ ou } x > a_3 \\ \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2}, & a_2 \leq x \leq a_3 \end{cases} \quad (2)$$

Verifica-se que $\alpha_M = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$, sendo chamado de número *fuzzy* triangular central. As operações aritméticas podem ser entendidas nos trabalhos de Pinho *et al* (1997), Bojadziev e Bojadziev (2007) e Zmeskal (2010); um resumo delas é visto nas operações 3, 4, 5, 6. Através da leitura, é possível perceber que as respectivas operações com números nebulosos também geram outros números nebulosos.

a) Soma: $A + B = [a_1^A + a_1^B, a_2^A + a_2^B];$ (3)

b) Subtração: $A - B = [a_1^A - a_1^B, a_2^A - a_2^B];$ (4)

c) Multiplicação:

$$\begin{aligned}
 \mu_{A \cdot B} &= \mu_A \cdot \mu_B \\
 \mu_{A \cdot B} > 0, \mu_A > 0 & \Rightarrow \mu_{A \cdot B} = \mu_A \cdot \mu_B; \\
 \mu_{A \cdot B} < 0, \mu_A > 0 & \Rightarrow \mu_{A \cdot B} = \mu_A \cdot \mu_B; \\
 \mu_{A \cdot B} < 0, \mu_A < 0 & \Rightarrow \mu_{A \cdot B} = \mu_A \cdot \mu_B;
 \end{aligned} \tag{5}$$

d) Divisão:

$$\begin{aligned}
 \mu_{A/B} &= \mu_A / \mu_B \\
 \mu_{A/B} > 0, \mu_A > 0 & \Rightarrow \mu_{A/B} = \mu_A / \mu_B; \\
 \mu_{A/B} < 0, \mu_A > 0 & \Rightarrow \mu_{A/B} = \mu_A / \mu_B; \\
 \mu_{A/B} < 0, \mu_A < 0 & \Rightarrow \mu_{A/B} = \mu_A / \mu_B;
 \end{aligned} \tag{6}$$

A partir do momento que um número *fuzzy* é estabelecido, os valores podem ser expressos por um único sinal que melhor representa o conjunto; este valor é denominado *crisp*. O processo para encontrar este número é chamado “defuzzificação”; em Bojadziev e Bojadziev (2007) são apresentados diversos métodos para estabelecer o *crisp value*; para números triangulares são citadas as formas a seguir (relação 7), chamadas *fuzzy average*.

$$\mu_{crisp}^{(1)} = \frac{\mu_1 + \mu_m + \mu_2}{3}; \mu_{crisp}^{(2)} = \frac{\mu_1 + 2\mu_m + \mu_2}{4}; \mu_{crisp}^{(3)} = \frac{\mu_1 + 4\mu_m + \mu_2}{6}; \tag{7}$$

Outras formas mais generalizadas também podem ser utilizadas como CAM – *Center of Area Method*, MMM – *Mean of Maximum Method* e HDM – *Height Defuzzification Method* (BOJADZIEV; BOJADZIEV,2007). O breve resumo buscou descrever as principais características dos números *fuzzy*, os próximos tópicos foram desenvolvidos para explicar o modelo proposto no artigo.

2.2 Precificação de opções modelo binomial

Cox *et al* (1979) apresentou um modelo de precificar uma opção em tempo discreto, a principal contribuição deste estudo foi a possibilidade de conhecer o preço de uma opção em períodos distintos, algo importante quando se trata de opções americanas. Vale ressaltar que a fórmula de Black e Scholes fornece o valor somente num único período, deste modo, o modelo pode ser aplicado exclusivamente para opções européias.

O modelo de Cox, também conhecido como modelo binomial, é demonstrado de forma prática e simplificada através de árvores binomiais, como pode ser visto na figura 3; neste caso, seria uma árvore geral de dois passos.

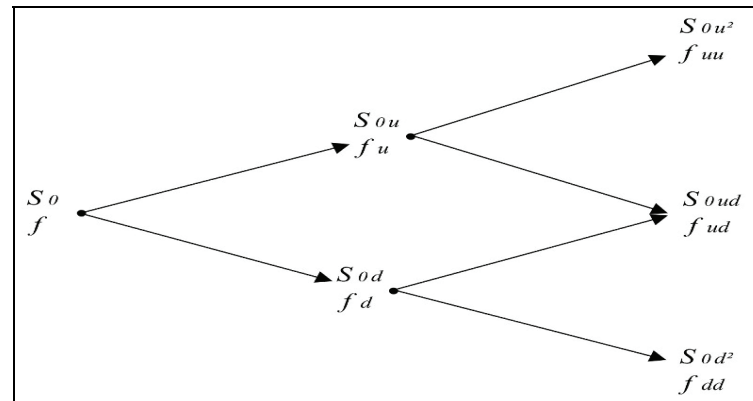


Figura 3 – Árvore binomial
Fonte: Hull (2006), p. 249

Como se percebe através da figura, são avaliados dois processos; no primeiro, analisa-se a evolução do preço S_0 através de uma taxa de subida “u” e queda “d”. No segundo, calcula-se o valor da opção f_t em cada período. No caso de uma opção europeia, a árvore possuiria um único passo, desta forma, a fórmula de Black-Scholes pode ser aplicada facilmente. Contudo, ao se tratar de uma opção americana, o modelo binomial possui aplicação importante, exatamente por representar o preço f_t em cada período, o que facilita a negociação, dado que opções americanas podem ser exercidas em qualquer período (HULL, 2006).

No artigo de Zmeskal (2010) são resumidas as principais fórmulas do modelo binomial:

a) Taxa de evolução dos preços: $d = e^{-r\Delta t} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$; $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$; $\sigma = \text{volatilidade}$;

b) Preço da opção americana: $f_t = \max(g_t, F_t)$; sendo;

$$F_t = e^{-r\Delta t} \cdot [q \cdot F_{t+1}^u + (1 - q) \cdot F_{t+1}^d]; \quad (8)$$

em que r é a taxa livre de risco.

c) Valor intrínseco: $g = \max(S_t - X; 0)$;

d) Probabilidade neutra ao risco: $q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$.

O exemplo numérico a ser apresentado nos próximos tópicos facilitará o entendimento da aplicação das fórmulas descritas.

2.3 Precificação de opções modelo binomial fuzzy

A incerteza seria uma das principais expressões presente no ambiente financeiro, Zmeskal (2010) apresenta, por exemplo, os termos “estocástico” e “probabilidade” como formas de expressar a incerteza. Contudo, mais um termo, algumas vezes negligenciado, também deveria ser utilizado – a imprecisão; diante disto, os modelos *fuzzy* passam a desempenhar um papel fundamental em finanças.

Ao observar as fórmulas presentes no modelo binomial percebe-se que as entradas de dados, como, por exemplo, as taxas de evolução dos preços, são vagas; isto é, a taxa imposta no modelo faz parte de algum intervalo de confiança utilizada pelo investidor, não

representando a verdadeira taxa de crescimento prevista. Ou seja, uma taxa de 10% estaria presente num intervalo entre 8% e 12%, entretanto, toda a árvore estaria baseada somente nos 10%.

Diante das limitações do modelo binomial, autores como Yoshida (2003), Eslami e Buckley (2007) e Zmeskal (2010) propõem a “fuzzificação” das entradas de dados do modelo. Um dos resultados interessantes seria a construção de uma árvore binomial *fuzzy*; como demonstrado nas propriedades, operações com números *fuzzy* geram outro número *fuzzy*, deste modo, entrada de dados *fuzzy* formariam preços de opções “fuzzificados”. Abaixo pode ser visualizada uma árvore binomial com entradas imprecisas.

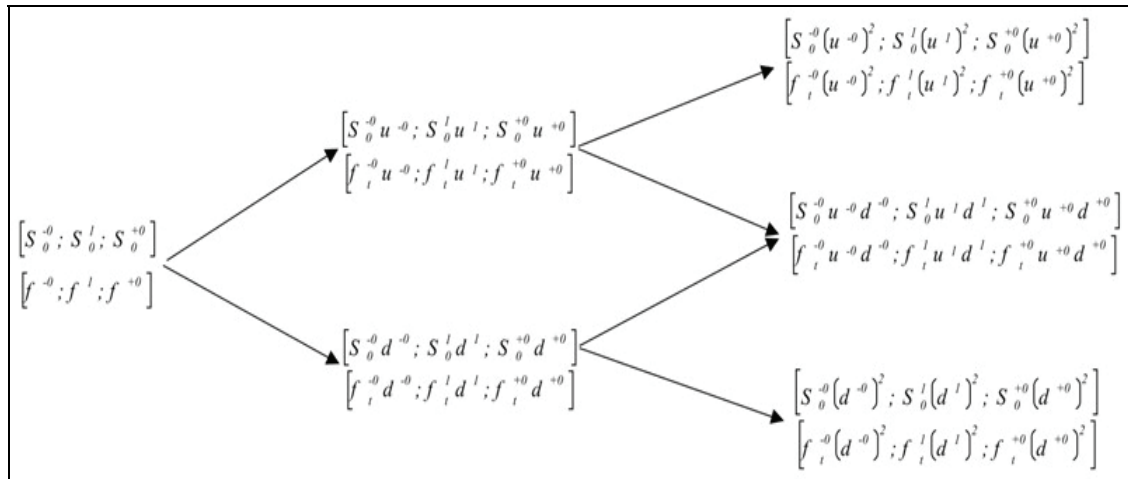


Figura 4 – Árvore binomial *fuzzy*

Fonte: Yoshida (2003), p. 160

Como pode ser observada, a árvore presente na figura 4 está representada com números *fuzzy* triangulares, porém, modelos com números retangulares também podem ser utilizados, como nos trabalhos de Yu e Ren (2008) e Zmeskal (2010). Mediante o conhecimento das fórmulas existentes no modelo binomial, Zmeskal (2010) as apresenta em forma de lógica *fuzzy*.

a) Taxa de evolução dos preços:

$$S_1 = [S_1^{-0}, S_1^{+0}] = [S_0^{-0} \cdot u^{-0}; S_0^{+0} \cdot u^{+0}]; S_1 = [S_1^{-0}, S_1^{+0}] = [S_0^{-0} \cdot d^{-0}; S_0^{+0} \cdot d^{+0}]; \quad (9)$$

b) Preço da opção americana:

$$f_1 = \max(S_1 - K, 0) = [f_1^{-0}, f_1^{+0}] = [\max(S_1^{-0} - K, 0); \max(S_1^{+0} - K, 0)]; \quad (10)$$

c) Valor intrínseco:

$$f_2 = \max(S_2 - K, 0) = [f_2^{-0}, f_2^{+0}] = [\max(S_2^{-0} - K, 0); \max(S_2^{+0} - K, 0)]; \quad (11)$$

As probabilidades neutras ao risco, em Zmeskal (2010), são encontradas a partir de programação não linear, deste modo, torna-se necessário resolver o problema de otimização (fórmula 12):

$$\max S_2 = S_2^+; \min S_2 = S_2^-; \quad (12)$$

Percebe-se no problema acima a necessidade de impor os limites dos preços do ativo na data de compra e exercício, além de criar o intervalo para a taxa livre de risco. Através da otimização podem ser determinadas automaticamente os preços das opções em números *fuzzy*. No trabalho de Yu e Ren (2008), os autores conseguem determinar os valores das probabilidades neutras ao risco, no caso abaixo, as estimativas *fuzzy* estão em forma de trapézio, como é vista na relação 13.

$$\left(\begin{array}{l} \underline{p}_1 = \left[\frac{1 + \underline{r}_1 - \underline{u}_1}{\underline{u}_1 - \underline{d}_1}; \frac{1 + \underline{r}_2 - \underline{u}_2}{\underline{u}_2 - \underline{d}_2}; \frac{1 + \underline{r}_3 - \underline{u}_3}{\underline{u}_3 - \underline{d}_3}; \frac{1 + \underline{r}_4 - \underline{u}_4}{\underline{u}_4 - \underline{d}_4} \right] \\ \underline{p}_2 = \left[\frac{\underline{r}_1 - 1 - \underline{u}_1}{\underline{u}_1 - \underline{d}_1}; \frac{\underline{r}_2 - 1 - \underline{u}_2}{\underline{u}_2 - \underline{d}_2}; \frac{\underline{r}_3 - 1 - \underline{u}_3}{\underline{u}_3 - \underline{d}_3}; \frac{\underline{r}_4 - 1 - \underline{u}_4}{\underline{u}_4 - \underline{d}_4} \right] \end{array} \right) \quad (13)$$

No caso de apresentação dos valores em formato de número *fuzzy* triangular pode-se adaptar através de $\underline{r}_z = \underline{r}_3$; $\underline{d}_z = \underline{d}_2$; $\underline{u}_z = \underline{u}_4$.

3 METODOLOGIA

O presente artigo trata-se de um estudo de caso com o objetivo de explicar e avaliar o uso de números *fuzzy* na precificação de opções de ativos de risco (ações). Uma das principais justificativas de utilização do modelo ocorre devido as incertezas do mercado financeiro não estarem ligadas somente as relações probabilísticas, mas também a conceitos vagos e imprecisos. Deste modo, a complementação dos modelos convencionais (como o modelo binomial de precificação de opções) através de números *fuzzy* possibilita um avanço na relação dos investidores com a incerteza.

Para viabilizar o entendimento do artigo e melhor compreensão dos modelos foi realizado um exemplo numérico e uma análise quando utilizada uma ação do mercado de capitais brasileiro. No exemplo são utilizados os dados do artigo de Eslami e Buckley (2007) para demonstrar o modelo binomial e binomial *fuzzy*. Na análise são implementados os modelos para uma série histórica no período entre Fevereiro 2010 a Fevereiro 2011 da PETR4. Através da série, as entradas no modelo foram “fuzzificadas”; o mesmo método foi utilizado em Chrysafis e Papadopoulos (2009) para precificar opções pelo modelo de Black-Scholes.

O método ainda pode ser justificado mediante as citações de Lazo (2004); dado que ações podem ser fortemente influenciadas por variáveis exógenas, torna-se complicado determinar o processo estocástico que simula o comportamento do ativo, principalmente quando o modelo supõe normalidade (como demonstra Castro Júnior e Silveira, 2009). Desta forma, é possível representar estas incertezas através dos números *fuzzy*.

Em ambos os casos serão apresentados os dados de análise, as árvores binomiais (somente 2 passos para objetivos de apresentação) e o preço da opção; sendo que no modelo *fuzzy* existirá a chamada “defuzzificação” do preço (o processo está detalhado na figura 5). Para auxiliar nas análises foi utilizado o *Microsoft Excel*, basicamente pela proposta do artigo ser introdutória, desta forma, um *software* de fácil utilização possibilitará melhor entendimento e maiores críticas a respeito do tema; sendo que os exemplos de Eslami e Buckley (2007) também foram demonstrados através do mesmo programa.

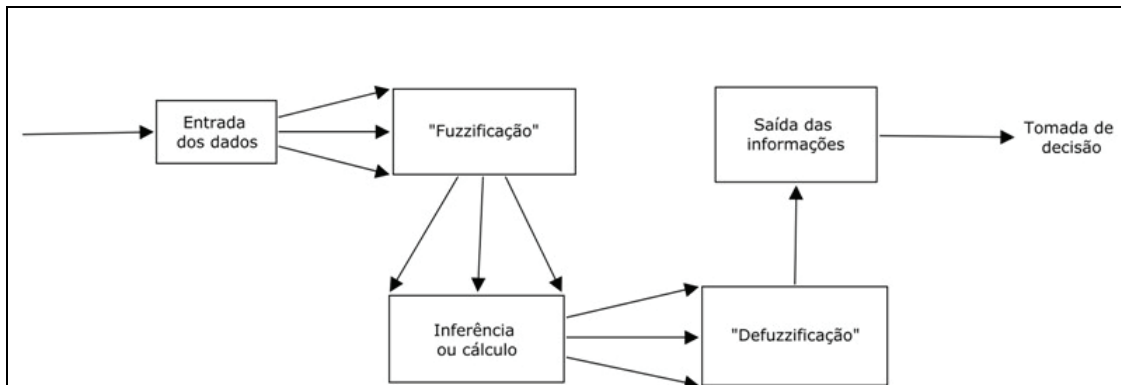


Figura 5 – Processo modelo *fuzzy*
Fonte: Oliveira (2008)

3.1 Exemplo 1 – Opção de compra fictícia

Neste primeiro caso serão utilizados os dados de um dos exemplos do artigo de Eslami e Buckley (2007). Na tabela 2 são apresentadas as informações do estudo, como se percebe, os dados estão em formato de números *fuzzy* triangular; sendo que todas as entradas do modelo foram “fuzzificadas”. Os valores das probabilidades neutras ao risco q_u e q_d foram calculados a partir do conjunto de equações 13.

Tabela 2 – Dados do exemplo

Fuzzy triangular	Valor atual	Exercício	U	D	r_f	q_u	q_d
x_0^-	57	60	1,04	0,94	0,05	0,647	0,343
x_1	60	62	1,05	0,95	0,06	0,651	0,349
x_0^+	63	64	1,06	0,96	0,07	0,657	0,353

Fonte: Eslami (2007)

Na figura 6 é demonstrado o exemplo clássico de precificação de opções pelo modelo binomial, na primeira árvore (parte a) constrói-se o processo de evolução do ativo, desde o preço inicial até a data de exercício. A linha x_1 da tabela foi utilizada como fonte de dados; os preços cresceram ou caíram como $S_t \cdot U$ ou $S_t \cdot D$ respectivamente (por exemplo: $60 \cdot 1,05 = 63$). Na segunda árvore (parte b) são calculados os valores da opção; nos últimos nós são encontrados os valores intrínsecos $g = \max(S_t - X; 0)$ (por exemplo: $\max(66,15 - 62; 0) = 4,15$).

Para calcular os nós intermediários e o primeiro, deve-se utilizar as fórmulas $q = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - e^d}{e^u - e^d}$ e $F_t = e^{-r \cdot \Delta t} \cdot [f_{t+\Delta t}^u \cdot (q) + f_{t+\Delta t}^d \cdot (1 - q)]$; os exemplos respectivos podem ser demonstrados como $q = \frac{(1,06 \cdot 0,25) - 0,95}{1,05 - 0,95}$ e $F_t = e^{-0,06 \cdot 0,25} \cdot [4,15 \cdot (q) + 0 \cdot (1 - q)] = 2,66$. Desta forma, no primeiro nó é estabelecido o preço da opção como \$1,71.

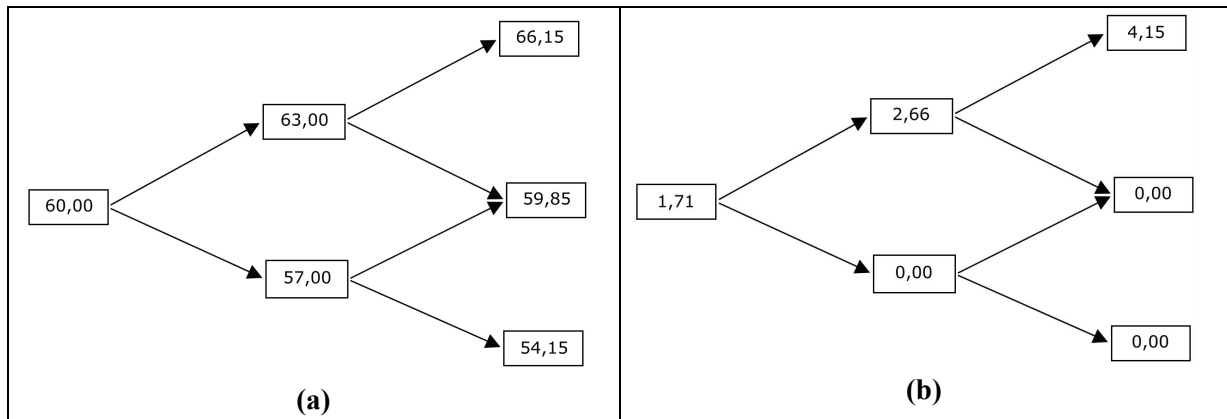


Figura 6 – Árvore binomial exemplo
Fonte: Eslami e Buckley (2007)

Dado o exemplo do modelo convencional, demonstra-se a explicação das árvores *fuzzy* presentes na figura 7. Para “fuzzificar” as entradas Eslami e Buckley (2007) utilizaram “*experts*” para classificar os dados em números triangulares através da formação de cenários otimistas – x_0^+ , pessimistas – x_0^- e mais prováveis – x_1 . Na parte “a” da figura 6, são visualizados novamente a evolução dos preços; neste caso ocorre $u = [S_0^- \cdot u^-; S_0^1 \cdot u^1; S_0^+ \cdot u^+]$ e $d = [S_0^- \cdot d^-; S_0^1 \cdot d^1; S_0^+ \cdot d^+]$ (por exemplo: $u = [57 \cdot 1,04; 60 \cdot 1,05; 63 \cdot 1,06] = [59,28; 63; 66,78]$).

Os valores intrínsecos podem ser encontrados como $g = [\max(S_2^- - X^+, 0); \max(S_2^1 - X^1, 0); \max(S_2^+ - X^-, 0)]$; por exemplo: $g = [\max(61,65 - 64; 0); \max(66,15 - 62; 0); \max(70,79 - 60; 0)] = [0; 4,15; 10,79]$. As probabilidades neutras ao risco são verificadas como

$$q_u = \left[\frac{1+r^+ - d^-}{u^+ - d^-}; \frac{1+r^1 - d^1}{u^1 - d^1}; \frac{1+r^- - d^+}{u^- - d^+} \right];$$

$$q_u = \left[\frac{1+0,07 - 0,94}{1,06 - 0,94}; \frac{1+0,06 - 0,95}{1,05 - 0,95}; \frac{1+0,05 - 0,96}{1,04 - 0,96} \right].$$

O preço da opção nas partes intermediárias e iniciais podem ser calculadas pelo exemplo $F_2 = e^{-r^+ \cdot 0,25} \cdot [10,78 \cdot (q_u^-) + 2,77 \cdot (q_u^+)] = 7,82$.

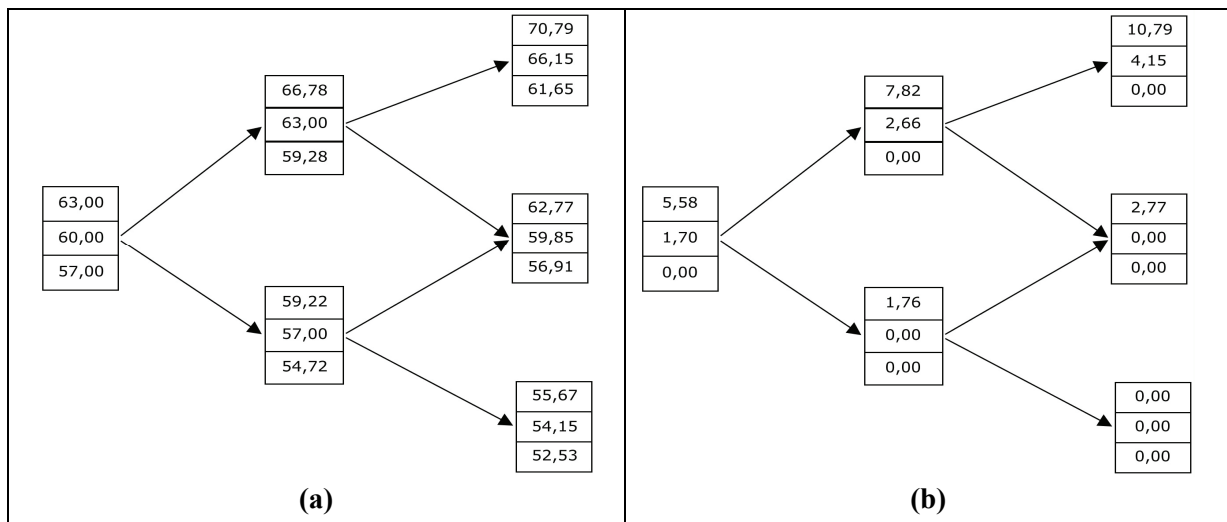


Figura 7 – Árvore binomial *fuzzy* exemplo
Fonte: Eslami e Buckley (2007)

Para finalizar o processo, realiza-se a “defuzzificação”, este processo é realizado para apresentar um valor que possa “melhor” representar o conjunto de estimativas; este valor é chamado de *crisp*. O número *crisp* foi encontrado através de um dos métodos de “defuzzificação”, neste caso, pela média entre [0; 1,70; 5,58] representado pelo valor de 2,43.

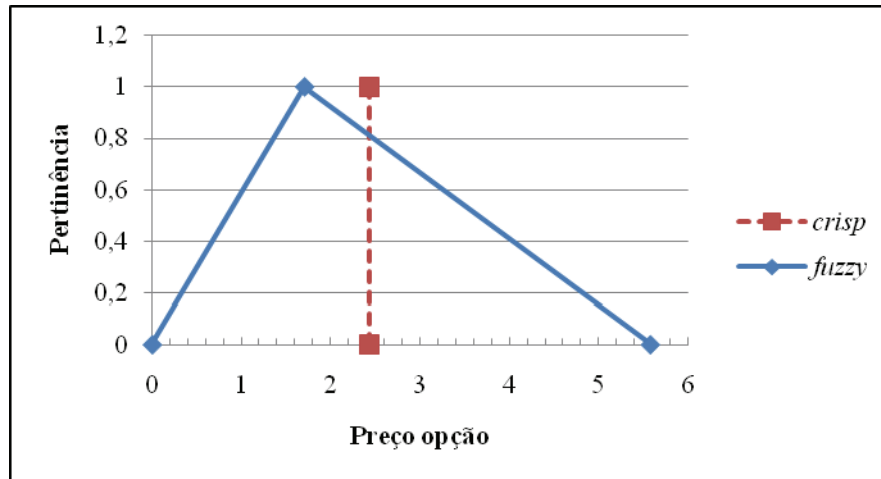


Gráfico 1 – Preço opção *fuzzy* e *crisp*
Fonte: Dados da pesquisa

No gráfico 1 podem ser visualizados o preço da opção *fuzzy* e *crisp*; vale ressaltar que os intervalos também podem ser utilizados para tomada de decisão; a interpretação ocorre pela utilização dos graus de pertinência ou adequacidade entre [0; 1]. Desta forma, 0 – nenhuma adequacidade, 0,5 – parcial adequacidade e 1 – alta adequacidade; por exemplo, ao desejar pertinência de 0,5, o intervalo de preços será [0,83; 3,70]. Também é possível compreender o grau 1 como alta aderência ao comparar o preço *fuzzy* com o preço da árvore binomial.

4 RESULTADOS

Nesta análise foram utilizadas informações do mercado para formar o preço de uma opção de compra – *Call*; foi escolhida a Petrobrás devido sua representatividade no mercado de capitais nacional, isto é, o segundo maior índice de negociação da carteira teórica do Ibovespa (10,375). A modelagem do preço atual *fuzzy* foi viabilizada através da série histórica entre Fevereiro 2010 a Fevereiro 2011. Quanto ao preço de exercício, adotou-se a média da série de opções (tabela 3) divulgadas pela Companhia Brasileira e Liquidação e Custódia – CLBC com vencimento para o dia 21/02/2011. Ressalta-se que numa análise real seria selecionado somente um dos preços de exercício da lista abaixo.

Tabela 3 – Série de opções Petrobrás

Série	Preço de Exercício
PETRB18	18,00
PETRB20	20,00
PETRB22	22,00
PETRB24	23,88
PETRB26	25,88
PETRB28	27,88
PETRB30	30,00
PETRB32	31,88
PETRB34	34,00
PETRB36	36,00
PETRB38	38,00
PETRB40	40,00

Fonte: Companhia Brasileira e Liquidação e Custódia

No artigo de Eslami e Buckley (2007), como também, no trabalho de Bojadziev e Bojadziev (2007) são propostas formas de “fuzzificação” através de painel de especialistas. No presente artigo é proposta a criação de intervalos de confiança a partir da série histórica do ativo que servirão de base para “fuzzificar” as entradas no modelo; o método pode ser eficaz para o caso de pequenos investidores *home brokers*, dado que estes indivíduos podem não possuir acesso a algum painel de especialistas para construir os números *fuzzy*.

No artigo, foi adotada a criação dos intervalos através da suposição de distribuição *t* de *Student*, mediante que as análises ocorreram de dados amostrais (desvio padrão populacional desconhecido); os intervalos podem ser visualizados na tabela 4. Vale ressaltar a natureza não estatística dos números *fuzzy* (OLIVEIRA, 2008), ou seja, apesar de utilizar um método estatístico para transformar o ponto em um número nebuloso; não é possível associar algum nível de probabilidade ao conjunto; deste modo, o método é especificamente para “fuzzificar” as entradas de dados (foi adotado um nível de confiança de 5%).

Tabela 4 – Intervalos de confiança

Intervalos	Valor	I^-	I^+
Preço	27,3700	25,7746	28,0584
Exercício	28,9600	27,2719	29,6884
U	1,0686	1,0261	1,1110
D	0,9358	0,9745	0,9001
σ_f	11,1700	11,1699	11,1912

Fonte: dados da pesquisa

A partir dos intervalos de confiança definidos, torna-se possível a “fuzzificação” das variáveis; na tabela 5 são demonstrados estes valores. Diante destas informações, novamente utilizou-se o conjunto de equações (13) para definir as probabilidades neutras ao risco; vale ressaltar que todos os *inputs* foram transformados em números *fuzzy* triangulares. Pode-se demonstrar, por exemplo, os valores

$$q_u = \left[\frac{1 + 0,0269 - 0,9019}{1,1088 - 0,9019}; \frac{1 + 0,0268 - 0,9358}{1,0686 - 0,9358}; \frac{1 + 0,0268 - 0,9724}{1,0284 - 0,9724} \right]$$

Tabela 5 – Dados do exemplo

Fuzzy triangular	Valor atual	Exercício	U	D	r_f	q_{u_i}	q_{d_i}
x_0^-	25,83	27,33	1,0284	0,9019	0,0268	0,6040	0,0275
x_1	27,37	28,96	1,0686	0,9358	0,0268	0,6854	0,3146
x_0^+	28,00	29,62	1,1088	0,9724	0,0269	0,9725	0,3960

Fonte: dados da pesquisa

Assim como no exemplo 1, as árvores foram desenvolvidas seguindo a metodologia clássica e o modelo *fuzzy*; os resultados podem ser visualizados na figura 8.

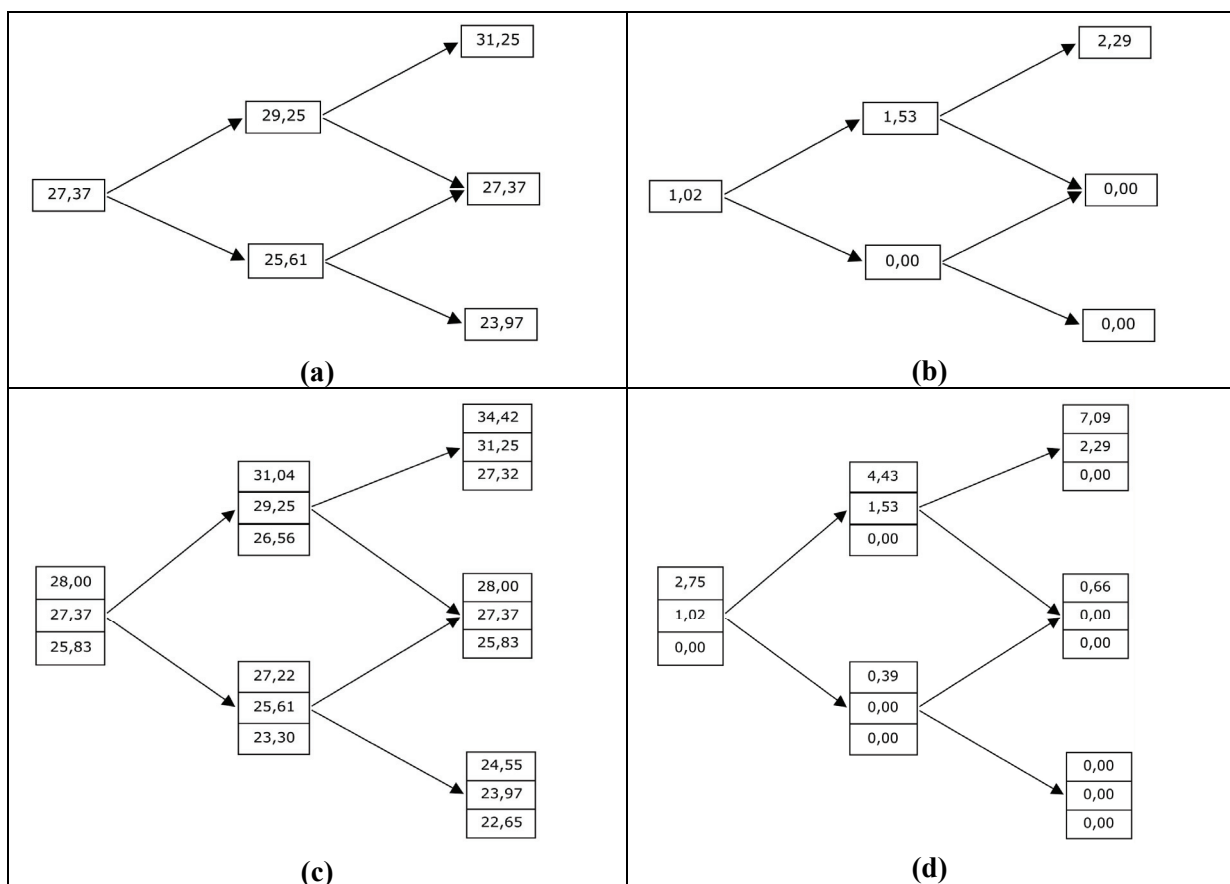


Figura 8 – Árvores de precificação

Fonte: Dados da pesquisa

Na figura 8 (parte b) observa-se o preço da opção no modelo de Cox et al (1979); como foi demonstrado anteriormente, a tomada de decisão através do preço *fuzzy* pode ser realizada tanto pelo intervalo quanto pela “defuzzificação”. O gráfico 2 resume ambas as informações; quanto ao intervalo, ao utilizar uma pertinência de 0,5 é observado o conjunto [0,5; 1,9]. Caso seja necessária a utilização de um valor que represente o número triangular, através da “defuzzificação” é encontrado o resultado de R\$ 1,26.

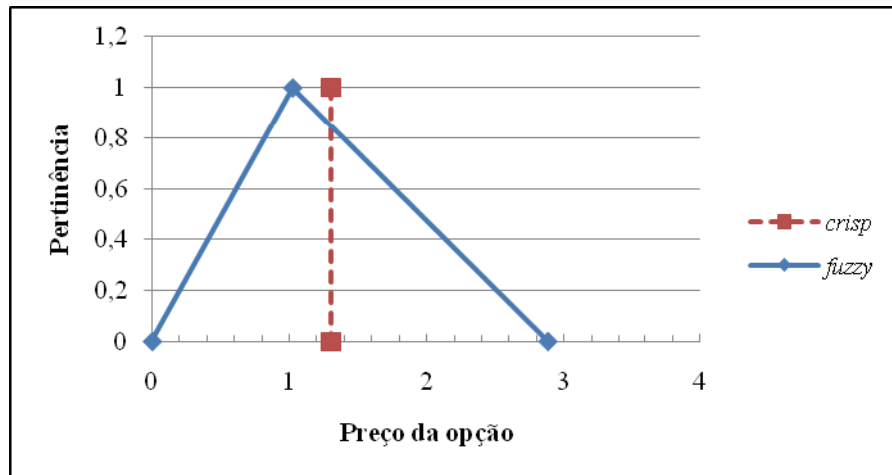


Gráfico 2 – Preço opção *fuzzy* e *crisp*

Fonte: Dados da pesquisa

A partir da formação do preço é possível levantar alguns argumentos a respeito do método; apesar das justificativas que defendem o uso dos números nebulosos, ainda existem pontos para discussão. Zmeskal (2010) realiza diversos “elogios” ao modelo; porém, quanto aos aspectos computacionais, o método é mais trabalhoso em relação ao modelo clássico, sendo que um dos principais problemas seria a criação dos intervalos para geração dos números *fuzzy*, ou seja, caso sejam formados por painel de especialistas, dependendo do grau de pessimismo destes indivíduos, poderão criar amplitudes muito distantes entre os preços.

No caso da “fuzificação” das variáveis de entrada através de intervalos de confiança, o decisor precisará estabelecer o nível de confiança para “estimação” dos valores, além de supor algum formato de distribuição para os dados; sendo que a amplitude tende a aumentar quando o nível de confiança decresce.

Um dos problemas relacionados ao tamanho da amplitude dos números nebulosos é apresentado em Lazo (2004); dado que as operações são baseadas em aritméticas de intervalos, os domínios dos valores *fuzzy* tendem a crescer de forma “explosiva” em cálculos sucessivos, principalmente quando operações de divisão são utilizadas. No exemplo e estudo de caso demonstrado não ocorreu este problema devido o uso de poucos passos na árvore binomial; contudo, a medida que os passos aumentem existe o risco deste problema ocorrer, o que levanta a necessidade de estudos que melhorem as capacidades do modelo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo representa ainda um pequeno passo a respeito do entendimento da temática, diversos trabalhos relacionados ao assunto podem ser identificados; entretanto, a utilização de modelos *fuzzy* aplicados a opções demonstra-se ainda em fase inicial no Brasil, pelo menos no que tange a área acadêmica. Isto pode ser verificado pela pequena quantidade de artigos publicados referentes ao tema.

Diante da justificativa de que incerteza pode ser caracterizada por probabilidade e imprecisão, os modelos estatísticos adaptados com lógica *fuzzy* podem trazer resultados significativos. Deste modo, a precificação de opções por meio de árvores binomiais *fuzzy* seria um dos modelos que forneceriam esta complementaridade entre probabilidade e imprecisão.

Mediante o objetivo introdutório do artigo, o estudo limitou-se a demonstrar exemplos simplificados para facilitar desde o entendimento e aderência ao tema até o desenvolvimento de críticas para melhoramento dos conceitos. O grande ponto de análise no modelo proposto no artigo seria a possível subjetividade nos valores das taxas de crescimento – “u” e declínio –

“d”; deste modo, a “fuzzificação” destas entradas trouxe melhores definições técnicas ao modelo.

Vale ressaltar as proposições de Oliveira e Montini (2009), a utilização de números *fuzzy* pode possuir papel fundamental na análise de projetos de investimentos e nos estudos de opções reais. Mediante estas aplicações, é de crucial importância entender o processo de apreçamento de uma opção, além de ampliar os horizontes de análises através da metodologia apresentada no artigo. Lazo (2004) ainda cita a sobre vantagem do método em relação as medidas convencionais, principalmente, na determinação de valor na presença de incertezas técnicas e de mercado; contudo, ainda há muito a evoluir neste campo. O próprio autor afirma a necessidade de pesquisas para controlar o processo “explosivo” mediante uma grande quantidade de operações.

Ao observar os exemplos e o caso, também é possível verificar a frágil necessidade de transformar em números *fuzzy* os valores dos preços atuais, preços de exercício e as taxas livre de risco. Quanto aos preços atuais, o valor pode ser definido pela última cotação; contudo, para projeções futuras, a “fuzzificação” pode ser importante; o mesmo se aplica as taxas livre de risco. Entretanto, em relação ao preço de exercício, este valor é definido por contrato, desta forma, a “fuzzificação” desta variável pode não ser tão aplicável ao modelo.

Para trabalhos futuros recomenda-se uma expansão do tema; como, por exemplo, demonstrar o cálculo de preço de uma opção de venda (*Put*); explicar o processo para um número maior de passos na árvore; apresentar de forma mais específica os cálculos com números *fuzzy*; trabalhos comparativos entre o método com painel de especialistas e intervalos de confiança; além de comparar os diversos métodos de “defuzzificação” na formação dos preços das opções.

REFERÊNCIAS

- ANTUNES, J. Lógica nebulosa para avaliar riscos na auditoria. **Revista Contabilidade e Finanças**. Edição Comemorativa, pp. 80-91, São Paulo, Setembro, 2006.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. *The pricing of options and corporate liabilities*. **The Journal of Political Economy**. Vol. 81, n. 3, pp. 637-654, May-Jun, 1973.
- BOJADZIEV, G.; BOJADZIEV, M. **Fuzzy logic for Business, Finance and Management**. 2nd edition. 2007.
- CAMARGOS, F. L. **Lógica nebulosa: uma abordagem filosófica e aplicada**. Universidade Federal de Santa. 2002. Disponível em: <<http://www.inf.ufsc.br/~barreto/trabaluno/IAfernandoLC.pdf>>.
- CASTRO JUNIOR, F. H. F.; SILVEIRA, H. P. Modelagem das distribuições das taxas de retorno dos índices Ibovespa e S&P500. **RAM-Revista de Administração Mackenzie**. Vol. 10, n. 01, p. 114-133, Jan./Fev., 2009.
- CHRYSAFIS, K. A.; PAPADOPOULOS, B. K. *On theoretical pricing of options with fuzzy estimators*. **Journal of Computational and Applied Mathematics**. Vol. 223, p.p. 552-566, 2009.
- CLBC. Companhia Brasileira de Compensação e Custódia. 2011. Disponível em: <<http://www.cbcl.com.br/cbcl/ControleRisco/posicoes/FormPesquisaPosicoesOpcoes.asp?tit=6&Idioma=pt-br>>.
- COX, E. **The fuzzy systems handbook**. 2nd edition. Chappaqua, New York: AP Professional, 1999.
- COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBINSTEIN, M. *Option pricing: a simplified approach*. **Journal of Financial Economics**. Vol. 7, pp. 229-263, 1979.
- ESLAMI, E.; BUCKLEY, J. J. *Pricing stock options using fuzzy sets*. **Iranian Journal of Fuzzy Systems**. Vol. 04, n. 02, pp. 1-14, 2007.

- LAZO, J. G. L. **Determinação do valor de opções reais por simulação monte Carlo com aproximação por números *fuzzy* e algoritmos genéticos.** Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 2004.
- OLIVEIRA, M. A.; MONTINI, A. A. Uma abordagem para análise de projetos de investimento utilizando métodos financeiros e lógica *fuzzy*. **RAU-Revista de Administração da Unimep**. Vol. 7, n. 03, p. 134-151, Set./Dez., 2009.
- OLIVEIRA, M. H. F. **A avaliação econômico-financeira de investimentos sob condição de incerteza: uma comparação entre o método de Monte Carlo e o VPL *Fuzzy*.** Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. 2008.
- PINHO, A. F.; MONTEVECHI, J. A. B.; PAMPLONA, E. O. Aplicações de números fuzzy triangulares em análises de investimentos em situações de incerteza – método baseado na teoria dos jogos. In: Encontro Nacional de Engenharia de Produção, 17, 1997, Gramado. **Anais...** Rio Grande do Sul: ENEGEP, 1997.
- YOSHIDA, Y. *A discrete-time model of American put option in an uncertain environment.* **European Journal of Operational Research**. Vol. 151, p.p. 153-166, 2003.
- YU, X.; REN, Z. **The valuation of american put option based on fuzzy techniques.** In: International Conference on Computer Science and Software Engineering. 2008.
- ZADEH, L. A. *Fuzzy sets.* **Information and Control**. Vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- ZMESKAL, Z. *Generalised soft binomial American real option pricing model (fuzzy-stochastic approach).* **European Journal of Operational Research**, Vol. 207, pp. 1096-1103, 2010.