

## Estabilidade De Preços De Ações No Mercado De Capitais Brasileiro: Um Estudo Aplicando Redes Neurais E Expoentes De Lyapunov

**Autoria:** Mauri Aparecido de Oliveira, Daniel Reed Bergmann, Wesley Mendes da Silva, Alessandra de Ávila Montini

### Resumo

Neste trabalho é apresentado um estudo sobre a estabilidade dos preços de mercado de ações para duas categorias de empresas denominadas como industrial e outros setores, no período de 2 de Janeiro de 1995 a 2 de Janeiro de 2008. Ou seja, é analisada a estabilidade dos preços de mercado para o período anterior a crise de 2008, iniciada com os títulos *subprime* dos Estados Unidos. São analisadas as implicações da estabilidade do processo de geração de retorno por paradigmas de racionalidade. A verificação da estabilidade foi feita através da aplicação de expoentes de Lyapunov. São apresentados resultados sobre a estabilidade dos preços para duas categorias de empresas, as indústrias (IND) formadas por Acesita, Ambev, Aracruz, Braskem, Duratex, Fosfertil, Gerdau, Klabin, Randon, Sadia, Sid Nacional, Souza Cruz, Unipar, Usiminas e VCP, e as empresas da categoria outros setores (OSE) formadas por Ampla Energia, Bradesco, Brasil Telecom, Cemig, Eletrobrás, Eletrobrás, Itaú Banco, Itaúsa, JB Duarte, Pronor, Besc, Alfa Financeira e Inepar. Um diagrama de dispersão do logaritmo dos preços sem tendência versus os retornos destas duas categorias (ou portfólios) mostrou um padrão caótico nos preços das ações indicando a presença de não-linearidade. No entanto, calculando-se os expoentes de Lyapunov foram obtidos valores negativos. Isso indica que as flutuações das trinta empresas analisadas resultam de processos de difusão ao invés de dinâmicas não-lineares. A racionalidade do comportamento dos preços é estudada através da verificação dos resíduos gerados a partir de previsões de modelos ARMA, Naive e de Redes Neurais *Feedforward*. Foram analisadas trinta empresas, divididas em dois portfólios, ou categorias, uma denominada de Indústria (IND) e a outra chamada de Outros Setores (OSE) contemplando empresas do setor de energia, financeiro e varejo. Foram encontradas evidências de não estacionariedade nos dados, o que levou a ter que transformar os dados para não incorrer em problemas de previsão devido à variância crescente. Também verificou-se não-linearidade nos dados, mas com evidências insuficientes de padrões determinísticos que possibilitasse concluir sobre a estabilidade dos preços das ações. Pode-se concluir que, após as transformações necessárias, os modelos de previsão que utilizam redes neurais mostraram-se um pouco melhores do ponto de vista de racionalidade. A sofisticação de um modelo pode inicialmente ser definida em termos da precisão *ex-post* (por exemplo, o RMSE) mas, além disso pode-se também considerar a compreensão do conjunto de informação. O modelo Naive é baseado na quantidade mínima de informação e tem a menor taxa de precisão entre as três classes de modelos considerados. A rede neural possui a maior compreensão do conjunto de informação porque inclui vários valores de retornos passados, bem como os retornos defasados do IBOVESPA. Dessa forma, a rede neural é em média cerca de 37% mais precisa que as previsões Naive em termos do RMSE. Os modelos ARMA variam com respeito à precisão, verificando-se que em média as RNA são 5% mais precisas que as previsões geradas pelos modelos ARMA.

## 1. Introdução

O objetivo deste trabalho é mostrar como a estabilidade de um sistema dinâmico estocástico, o mercado de ações negociadas na BOVESPA, é medida usando os expoentes de Lyapunov. Especificamente, foi utilizada uma rede neural *feedforward* para estimar os expoentes, sendo que um expoente positivo é uma definição operacional de caos. Além disso, a racionalidade das previsões é avaliada a partir dos erros de previsão gerados por modelos: (i) que consideram somente a informação do último instante (Naive), (ii) modelos autoregressivos de média móvel (ARMA) e (iii) redes neurais artificiais (RNA).

Os conceitos de racionalidade, estabilidade e comportamento caótico são importantes em diversas áreas incluindo economia e finanças, principalmente porque oferecem formas alternativas de explicações para as variáveis econômicas e financeiras. Os resultados foram obtidos a partir de duas categorias de empresas que possuem ações negociadas em bolsa de valores. A escolha das empresas não seguiu um padrão pré-determinado, basicamente foi guiada pela disponibilidade de dados que pudessem compor um conjunto de trinta empresas divididas em dois grupos de quinze, chamados de Indústrias (IND) e Outros Setores (OSE).

Com relação ao período de escolha, este foi determinado levando-se em conta o objetivo de realizar um estudo do mercado de ações anterior ao que está convencionando-se chamar de a crise financeira de 2008. Ou seja, este estudo contempla uma próxima etapa na qual a estabilidade dos preços de mercado será analisada para o período da crise de 2008, iniciada com os títulos *subprime* dos Estados Unidos. Após a formação das categorias, cada uma delas foi dividida em três grupos (LOW, MID e HIG) de acordo com seu valor de mercado. O resultado é um total de seis portfólios: três industriais (IND\_LOW, IND\_MID e IND\_HIG) e três dos outros setores (OSE\_LOW, OSE\_MID e OSE\_HIG).

A estabilidade e a natureza dos caminhos seguidos pelos preços das ações é avaliada pelo cálculo dos expoentes de Lyapunov. Com esse método é possível estabelecer a presença de não-linearidade na série de retornos (WILKENS, 2004). Além disso, o cálculo de expoentes de Lyapunov é uma alternativa para a verificação da presença de raiz unitária na série temporal (HSIEH, 1989, 1991 e WOLF *et al.* 1985).

O trabalho inicia com uma revisão dos conceitos de não-linearidade, em que um dos principais testes empregados é o BDS, e de agentes heterogêneos que caracterizam o comportamento do mercado financeiro. As finanças comportamentais utilizam modelos nos quais alguns agentes não são completamente racionais, em função disso é realizada uma discussão sobre o assunto de tal forma a preparar para o teste de racionalidade utilizado na análise de resultados. A seguir há uma breve discussão conceitual sobre expoentes de Lyapunov e redes neurais do tipo *feedforward*. Na seção dados e metodologia são apresentadas as empresas escolhidas para realização dos testes e caracterização do trabalho como estudo quantitativo. São apresentadas as análises, resultados obtidos e por fim, tem-se a conclusão do trabalho.

## 2. Revisão Teórica

### 2.1 Não-Linearidade

Sistemas não-lineares podem ser estocásticos ou caóticos. Enquanto que séries temporais não caóticas são dominadas por elementos estocásticos, sistemas caóticos são sistemas determinísticos que podem ser semelhantes a ruídos brancos. Existem poucas evidências de caos em mercados financeiros, as ferramentas adquiridas ao longo dos últimos anos (por exemplo, modelos ARCH e suas extensões) ainda são úteis para analisar dados financeiros, enquanto novos modelos de aprendizagem dinâmica estão sendo desenvolvidos. Uma das tecnologias mais utilizadas em sistemas que envolvem aprendizagem são as redes neurais artificiais (RNA). Outros sistemas com capacidade de aprendizagem incluem algoritmos genéticos e sistemas *fuzzy*. As RNA têm sido utilizadas para detectar não-

linearidades em dados do mercado financeiro (LEE, WHITE e GRANGER, 1993), bem como aproximar funções não-lineares (KUAN e LIU, 1995). O teste BDS, desenvolvido por Brock (1996), é utilizado para verificar se a série dos log-retornos de ações é formada por observações independentes e identicamente distribuídas (IID). O teste BDS é um teste *portmanteau* relacionado a dependência em séries de tempo. Conforme Fernandes e Preumont (2003, p. 4), o BDS apresenta um alto poder contra uma variedade de modelos lineares, não-lineares e não-estacionários.

## 2.2 Agentes Heterogêneos

Finanças computacionais baseadas em agentes é uma área que envolve o desenvolvimento de modelos econômicos baseados na interação de muitos agentes heterogêneos. Algumas das ferramentas utilizadas em finanças baseadas em agentes incluem redes neurais e expoentes de Lyapunov. Para um sistema dinâmico com duas trajetórias a partir de condições iniciais diferentes, um expoente de Lyapunov positivo (negativo) nos diz o quão rápido a trajetória irá divergir (convergir). Dado o expoente de Lyapunov  $\lambda$  (lambda) e a diferença nas duas condições iniciais,  $\varepsilon$ , pode-se encontrar o número de períodos,  $n$ , no qual as duas trajetórias irão divergir por uma amplitude,  $R$ . Ou seja,  $n = \ln(R/\varepsilon)/\lambda$ . Normalmente, a presença de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo indica a presença de caos. Gencay e Dechert (1992) encontraram expoentes de Lyapunov próximos de zero e interpretaram os resultados como evidência de raiz unitária em dados financeiros.

Nesse ponto é importante salientar que a teoria do caos é definida como sendo o estudo de sistemas dinâmicos não-lineares complexos, onde por complexo entenda-se uma grande quantidade de interações entre diversos agentes, não-linearidade como a necessidade de recursão através de algoritmos matemáticos e dinâmico implicando em não constante e não periódico. Quanto a sistema, é uma definição estudada desde cedo nos cursos de graduação em administração, como pode ser visto em Maximiano (1997) na página 238. Dessa forma, a teoria do caos é, de forma bem geral, o estudo das mudanças em sistemas complexos através do uso de modelos matemáticos.

Brock e Hommes (1997), propõem o conceito de Equilíbrio Racional Adaptativo (ARE) onde a instabilidade local pode resultar de conflitos na escolha entre um conjunto de preditores ou funções esperanças. Eles escrevem que: “Quando todos os agentes utilizam o preditor menos custoso, ‘regra de bolso habitual’, o equilíbrio do estado estacionário é instável. As variáveis endógenas começam flutuando e os erros de predição a partir do preditor menos custoso aumentam. Quando os agentes utilizam preditores mais custosos e sofisticados (tal como, expectativas racionais, crenças fundamentalistas, ou aprendizagem por mínimos quadrados), as variáveis endógenas convergem para seu (único) equilíbrio de estado estacionário”. Brock e Hommes (1997) e Grandmont (1998) consideram sistemas dinâmicos estocásticos e analisam a seqüência do equilíbrio temporário de sua estrutura determinística. Focando a dinâmica do preço do ativo em um mercado com agentes heterogêneos, algumas ferramentas como os Modelos de Agentes Heterogêneos (*Heterogeneous Agent Models - HAM*) têm sido desenvolvidas (HOMMES, 2006; ANUFRIEV e DINDO, 2007).

Muitos modelos do tipo HAM (BROCK e HOMMES, 1998; GAUNERSDORFER, 2000; BROCK, HOMMES e WAGENER, 2005) consideram que as demandas dos agentes não mudam com a riqueza, ou seja, exibem um padrão constante de aversão absoluta ao risco (CARA). A utilidade CARA é uma classe de funções de utilidade, também chamada de utilidade exponencial. Para alguma constante  $a$  positiva, tem a forma:

$$U(c) = -\frac{e^{-ac}}{a} \quad (1)$$

Porém, esta hipótese pode ser alterada assumindo que a demanda aumenta linearmente com a riqueza dos agentes, o qual corresponde a chamada aversão ao risco relativa constante

(CRRA). Se for realizada a suposição de que as preferências de um agente são dadas pela função de utilidade CRRA tem-se:

$$U(c) = \frac{c^{1-a}}{1-a}, \quad a > 0 \quad (2)$$

onde o coeficiente  $a$  é o coeficiente de aversão ao risco relativo. Neste caso é fácil mostrar que a fração da riqueza investida em uma ação é constante ao longo dos níveis de riqueza.

### 2.3 Finanças Comportamentais e Eficiência de Mercado

Apreçamento de ativos é um paradigma tradicional que assume que os investidores são completamente racionais. Finanças comportamentais consideram uma abordagem psicológica para o apreçamento de ativos. Existe uma ampla variedade de campos e áreas de pesquisa e aplicação oferecendo modelos alternativos ao apreçamento de ativos que consideram que nem todos os investidores são totalmente racionais. Hirshleifer (2001) fornece uma excelente revisão da literatura para isso.

Finanças comportamentais utilizam modelos nos quais alguns agentes não são completamente racionais, ou por causa das preferências ou devido a crenças erradas. Um dos principais alicerces em finanças é a Hipótese de Mercado Eficiente (*Efficient Markets Hypothesis* - EMH). A EMH considera que a concorrência entre os investidores que buscam lucros anormais guiam os preços a seu valor “correto”.

A EMH não assume que todos os investidores sejam racionais, mas assume que os mercados sejam racionais. A EMH não assume que os mercados podem prever o futuro, mas assume que mercados façam previsões não viesadas do futuro. Em contraste, as finanças comportamentais assumem que, em algumas circunstâncias, mercados financeiros são informacionalmente ineficientes (HOMMES, 2006; ANUFRIEV e DINDO, 2007).

As finanças comportamentais alegam que algumas características dos preços dos ativos são mais plausivelmente interpretadas como desvios do “valor fundamental”, e que estes desvios ocorrem devido a presença dos *traders*, os quais não são completamente racionais. A teoria da arbitragem limitada apresenta que *traders* irracionais causam desvios do valor fundamental, e os *traders* racionais freqüentemente são ineficazes para mudar tal situação.

Para conseguir extrair mais da estrutura destes desvios, os modelos comportamentais freqüentemente assumem uma forma específica de irracionalidade. Para auxiliar nesta tarefa, os analistas utilizam evidências experimentais extensivas compiladas através de psicologia cognitiva sobre os vieses sistemáticos ocasionados pelas crenças e preferências das pessoas. Para auxiliar no entendimento desse assunto pode-se consultar Camerer (1995), Rabin (1998), Kahneman e Tversky (2000) e Gilovich, Griffin e Kahneman (2002).

Um componente importante para qualquer modelo de mercado financeiro é a especificação de como os agentes formam suas expectativas. Evidências a partir de estudos de psicologistas (RABIN, 1998) mostram que as pessoas possuem excesso de confiança e otimismo em seus julgamentos, ou seja, têm visão não realista de suas habilidades e perspectivas. Kahneman e Tversky (1974) mostram que quando as pessoas tentam determinar a probabilidade que um conjunto de dados A foi gerado por um modelo B, ou que um objeto A pertence a uma classe B, eles freqüentemente utilizam a heurística da representatividade. Isto significa que elas avaliam a probabilidade a partir do grau em que A reflete as características essenciais de B. Muitas vezes, a heurística da representatividade é útil, mas ela pode gerar alguns vieses perigosos.

O paradigma atual do comportamento individual em teoria de finanças está baseado na maximização da utilidade esperada e aversão ao risco, o qual tem estado sob ataque em anos recentes devido a sua imprecisão descritiva. O paradigma clássico implica em analisar como os indivíduos estão tipicamente sujeitos a determinadas tendências. Psicologistas

experimentais têm demonstrado que as pessoas desviam sistematicamente das previsões escolhidas e analisam como esse comportamento influencia o mercado (TABAK *et al.*, 2009; FORBES, 2009; POMPIAM, 2006).

## 2.4 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov podem ser utilizados na determinação da estabilidade de um sistema estocástico dinâmico. Especificamente, assumindo que o sistema estocástico dinâmico,  $f : R^n \rightarrow R^n$ , gera, por exemplo, retornos de ativos

$$R_{t+1} = f(R_t) + \varepsilon_{t+1}^s \quad (3)$$

onde  $R_t$  e  $\varepsilon_t^s$  representam o estado do sistema e um choque no sistema, respectivamente, ambos no tempo  $t \in [1, 2, \dots, \infty]$  (BASK *et al.* 2006).

Para um sistema n-dimensional como mostrado na equação (3), existem  $n$  expoentes de Lyapunov que são classificados do maior para o menor expoente:  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  e são estes expoentes que fornecem informação sobre as propriedades de estabilidade do sistema dinâmico  $f$  em (3). Considere que o sistema amplifica uma pequena diferença entre os estados iniciais  $R_0$  e  $R'_0$ , ou seja:

$$R_t - R'_t = f^j(R_0) - f^j(R'_0) \cong Jf^j(R_0)(R_0 - R'_0), \quad (4)$$

onde  $f^j(R_0) = f(\dots f(f(R_0))\dots)$  denota  $j$  sucessivas iterações do sistema dinâmico começando no estado  $R_0$ , e  $Jf$  é o Jacobiano do sistema

$$Jf^j(R_0) = Jf(R_{j-1})Jf(R_{j-2})\dots Jf(R_0) \quad (5)$$

Então, associado com cada expoente de Lyapunov,  $\lambda_i$ ,  $i \in [1, 2, \dots, n]$ , existem sub-espacos aninhados  $U^i \subset R^n$  de dimensão  $n+1-i$  com a propriedade que

$$\lambda_i \equiv \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln \|Jf^j(R_0)\|}{j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} \ln \|Jf(R_k)\| \quad (6)$$

para todo  $R_0 \in U^i - U^{i+1}$  (BASK *et al.* 2006). O ponto importante é que os expoentes de Lyapunov fornecem a base matemática para a análise da estabilidade de um sistema dinâmico não-linear.

## 2.5 Redes Neurais

Uma rede neural pode ser considerada como uma técnica de processamento de dados que mapeia, ou relaciona, algum tipo de entrada de informação à uma saída de dados. Por exemplo, a entrada pode estar na forma de uma imagem bidimensional com alguma parte faltante ou segmento distorcido e o processamento da saída pode produzir uma imagem corrigida. Nas aplicações em séries temporais, a entrada pode ser uma série temporal unidimensional e a saída a melhor estimativa para o próximo valor da série (AZOFF, 1994). Em geral, a tarefa executada pela rede neural pode ser dividida em quatro tipos distintos de aplicação (DUDA e HART, 1993): 1. Classificação; 2. Associação; 3. Codificação e 4. Simulação. Qualquer tarefa particular pode envolver um certo número das funções descritas acima. Por exemplo, a previsão de séries temporais por um *perceptron* pode envolver um elemento de compressão dos dados de entrada (codificação), um elemento de redução de ruído (associação), a capacidade de determinar padrões recorrentes que levem a comportamento preditível (classificação) e a previsão de um único evento (simulação).

Algumas tarefas de processamento desempenhadas pela rede neural podem também ser realizadas por técnicas tradicionais, tal como a análise de regressão (AZOFF, 1994). No

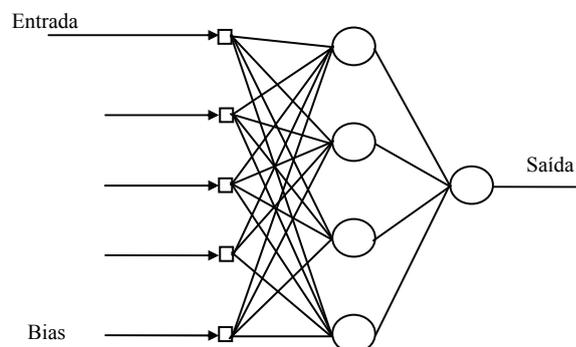
entanto, nenhuma compartilha das capacidades únicas da rede neural, que podem ser sumarizadas como: Generalização; Flexibilidade e Modelagem não-linear.

A principal razão para o uso de redes neurais nas empresas é a capacidade de realizar previsão de um dado valor desejado ou variável de saída  $y$ , a partir de um conjunto de entrada de variáveis observadas  $x$ . Em séries temporais, o conjunto de variáveis de entrada  $x$  pode incluir variáveis defasadas no tempo das variáveis atuais de  $x$ , bem como valores defasados de  $y$ . O estudo de previsão, usualmente inicia-se com um modelo de regressão dado pela seguinte equação:

$$y_t = \sum_{k=1}^K \beta_k x_{k,t} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \text{ IID} \quad (7)$$

sendo que a variável  $\varepsilon_t$  é considerada um distúrbio aleatório, assumida como sendo normalmente distribuída, com média zero e variância  $\sigma^2$  e  $\{\beta_k\}$  representa os parâmetros a serem estimados. O conjunto de estimadores dos parâmetros é denotado por  $\{\hat{\beta}_k\}$ , enquanto que o conjunto de previsões de  $y$  geradas pelo modelo com o conjunto de coeficientes  $\{\hat{\beta}_k\}$  é denotado por  $\{\hat{y}_t\}$ . O objetivo é selecionar  $\{\hat{\beta}_k\}$  de tal forma que seja minimizada a soma das diferenças quadráticas entre as observações atuais  $y$  e as observações previstas pelo modelo linear,  $\hat{y}$ . O modelo linear tem a propriedade útil de ter uma solução de forma fechada para resolver o problema de regressão, ou seja, de minimizar a diferença quadrática entre  $y$  e  $\hat{y}$ . Deste modo, o método de regressão linear (ou auto-regressão linear) é rápido. Para a previsão de um período curto, o modelo linear é um ponto de partida razoável, ou *benchmark*, visto que em muitos mercados, observam-se apenas pequenas mudanças simétricas na variável a ser predita, ao longo de uma tendência de longo prazo. No entanto, isto pode não ser preciso o bastante para mercados financeiros voláteis em que pode haver um processo não-linear dos dados. Movimentos lentos no aumento dos preços dos ativos, seguidos por colapsos repentinos conhecidos como “bolhas” são comuns de acontecer. Dessa forma, o modelo linear pode falhar em capturar ou prever pontos de mudança acentuada nos dados. Por esta razão é que são utilizadas técnicas não-lineares de previsão.

A razão para o uso de uma rede neural é simples e direta. O objetivo é encontrar uma abordagem ou método o qual realize bem previsões para dados gerados por processos que frequentemente são desconhecidos e altamente não-lineares, com uma quantidade pequena de parâmetros e o qual seja mais fácil de estimar que os modelos não-lineares paramétricos.



**Figura-1** Rede neural do tipo *feedforward*.

Neste trabalho foram utilizadas RNA do tipo alimentadas a diante (ou *feedforward*) que incluem entradas, uma camada intermediária e uma camada de saída para realizar a previsão de um passo à frente. A Figura-1 ilustra esse tipo de RNA.

### 3. Dados e Metodologia

Nesta seção é apresentado o procedimento de coleta e preparação dos dados das ações das categorias IND e OSE, bem como a característica metodológica do trabalho.

#### 3.1 Empresas Selecionadas

A partir do conjunto de empresas que tem ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo foram selecionadas trinta empresas, utilizando-se como critério que estas deveriam ter ações negociadas no período de 2 de janeiro de 1995 até 2 de janeiro de 2008. O período escolhido não possui nenhum motivo específico, basicamente procurou-se construir uma base de dados que contivesse informações iniciando no primeiro mandato do governo de Fernando Henrique Cardoso até o começo de 2008 (período em que a economia mundial não sofria ainda os malefícios da crise). Dessa forma, a base de dados contém 2847 valores de preços de fechamento para cada empresa. As trinta empresas foram divididas em dois portfólios principais, ou categorias, uma denominada de Indústria (IND) e a outra chamada de Outros Setores (OSE) contemplando empresas do setor de energia, financeiro e varejo, principalmente. O Quadro-1 apresenta as duas categorias ou portfólios principais.

Empresas divididas nas categorias: Indústria e Outros Setores	
Empresas da Categoria Indústria	Empresas da Categoria Outros Setores
Unipar PNB	Ampla Energ ON
Klabin PN	JB Duarte PN
Sadia PN	Alfa Fin PN
Randon Part PN	Pronor PN
Aracruz PNB	Lojas Amer PN
Braskem PNA	Itausa PN
Gerdau PN	Eleva ON
Duratex PN	Brasil ON
Fostertil PN	Brasil Telec PN
Souza Cruz ON	Besc PNB
Uniminas PNA	Itaubanco PN
VCP PN	Bradesco PN
Sid Nacional ON	Cemig PN
Acesita PN	Eletrobras ON
Ambev PN	Light ON

**Quadro-1** Empresas por Categoria de Indústria e de Outros Setores.

Depois que as categorias foram construídas, realizou-se a divisão de IND e OSE em três grupos (LOW, MID e HIG) de acordo com a média dos valores negociados no período analisado, sendo que cada grupo é composto por um número de cinco empresas. Sendo assim, o resultado é um total de seis portfólios. A Figura-2 apresenta as curvas de valores médios dos seis portfólios ao longo do tempo considerado. Na Figura-2 o eixo das ordenadas representa o valor médio do preço de fechamento das empresas consideradas, IND\_LOW corresponde a série de preço médio das cinco empresas com menores médias de valores de fechamento dentro da categoria IND. A mesma idéia é usada para formar IND\_MID e IND\_HIG (que considera as cinco empresas com as maiores médias de preços de fechamento). Dessa forma, esse conceito estende-se para a formação das séries OSE\_LOW, OSE\_MID e OSE\_HIG. As análises posteriores que serão realizadas consideram os seis portfólios gerados a partir das categorias IND e OSE. Ou seja, a categoria IND é representada pelas seis séries temporais criadas a partir do valor médio do preço de fechamento das empresas consideradas para o setor industrial. O mesmo acontece para a categoria OSE, que representa as empresas dos outros setores da economia.

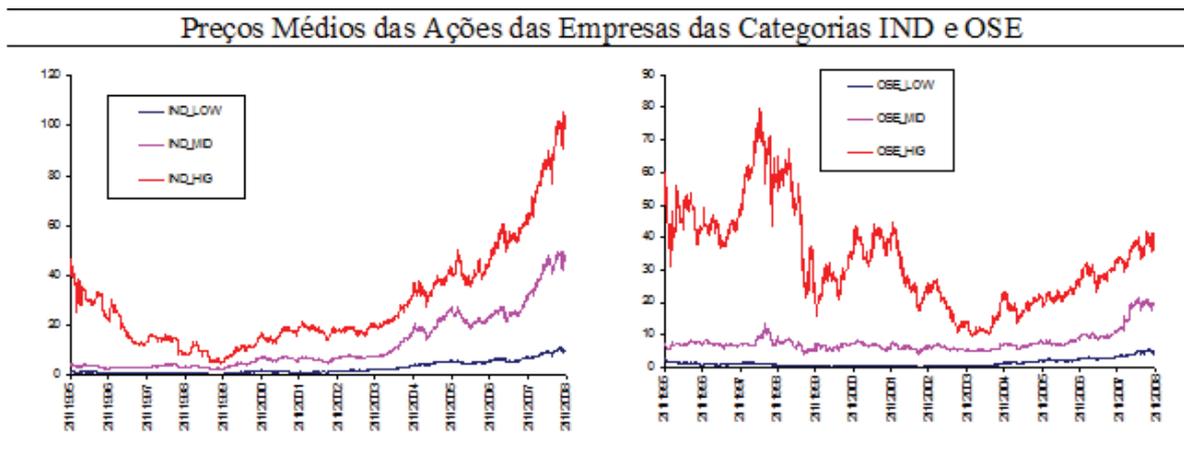


Figura-2 Séries dos seis portfólios conforme preço médio de fechamento.

### 3.2 Característica Metodológica

Este trabalho está baseado em teorias quantitativas de análise, sendo assim os modelos matemáticos e estatísticos são utilizados a fim de atender o objetivo da pesquisa. Os estudos quantitativos são aqueles em que os pesquisadores estabelecem hipóteses e as testam por meio da mensuração de variáveis operacionais definidas, quantificando o resultado com o uso de variados métodos matemáticos e estatísticos. É um tipo de pesquisa tradicionalmente aceito como tendo confiabilidade, fidedignidade e validade, desde que realizada seguindo uma metodologia rigorosa. A validação dá-se pelo nível de significância adotado nos testes estatísticos (MARCONI e LAKATOS, 2007). O nível de significância será chamado aqui de p-valor.

## 4. Tratamento dos Dados para Análise

### 4.1 Verificação da hipótese IID

Foi utilizado o teste BDS, desenvolvido por Brock (1996), a fim de verificar se as séries são IID. O teste BDS é realizado obtendo-se inicialmente a primeira diferença do logaritmo da série original contendo N observações. Depois disso é selecionado o valor da dimensão (m) em que são inseridos vetores m-dimensionais, isso converte a série de escalares em uma série de vetores com entradas sobrepostas. O teste BDS é um teste bi-caudal, rejeita-se a hipótese nula se a estatística de teste BDS é maior que ou menor que os valores críticos (ou seja, se  $\alpha = 0,05$ , tem-se valor crítico =  $\pm 1,96$ ). O teste BDS foi executado da segunda até a sexta dimensão, portanto, uma determinada série temporal dos preços diários de ações rejeitará a hipótese nula se, e somente se, pelo menos um dos cinco níveis descritivos do teste (p-valor) for menor do que o nível de significância de 5%.

Série	Dim. 2	Dim. 3	Dim. 4	Dim. 5	Dim. 6
IND LOW	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
IND MID	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
IND HIG	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela-1a - Resultados obtidos pelo teste BDS nas respectivas dimensões: portfólio IND.

Série	Dim. 2	Dim. 3	Dim. 4	Dim. 5	Dim. 6
OSE LOW	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
OSE MID	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
OSE HIG	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela-1b - Resultados obtidos pelo teste BDS nas respectivas dimensões: portfólio OSE.

Em vista dos resultados obtidos nas Tabelas-1a e 1b, verifica-se que todas as séries acima não podem ser consideradas IID ao nível de 5%.

#### 4.2 Análise de Estabilidade das Séries

Para que os seis portfólios pudessem ser analisados pelas diferentes técnicas de previsão Naive, ARMA e RNA, foi realizada uma transformação nos dados para remover a tendência através do log dos preços das ações, e depois disso obtidas as séries de diferenças dos seis portfólios conforme pode ser visto na Figura-3. Ou seja, foram criadas as séries das diferenças dos logaritmos dos preços sem a tendência determinística. Para remover a tendência foi utilizado o comando *detrend* do MATLAB® versão 6.5. A diferença da série é realizada para tornar as séries estacionárias e permitir que os modelos não sejam afetados pela volatilidade ao longo do período analisado. As séries das diferenças dos logaritmos dos preços sem a tendência determinística são denominadas de DIF\_DETREND\_LN\_SÉRIE e são apresentadas conjuntamente, na Figura-3, tanto para as categorias das empresas IND como para as OSE.

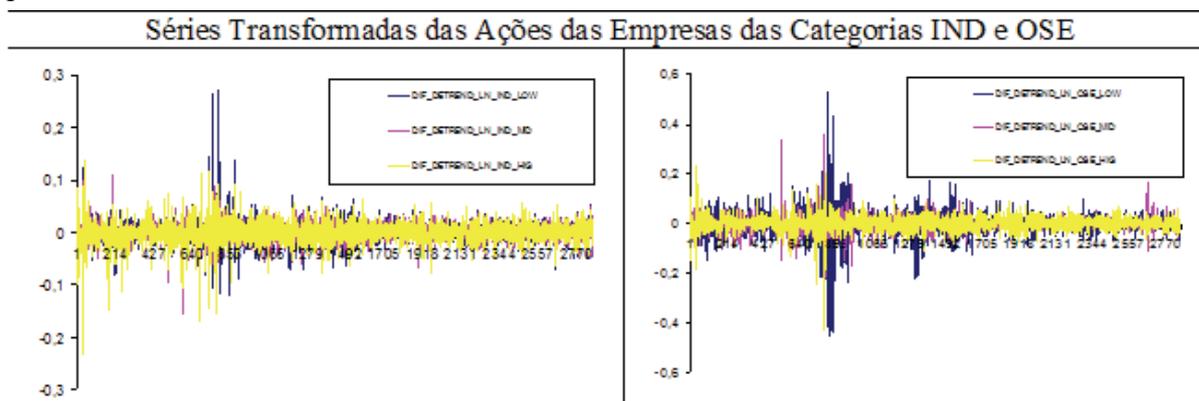


Figura-3 Séries transformadas dos seis portfólios utilizadas para as análises.

Para verificar a hipótese de que as séries transformadas apresentam comportamento de séries estacionárias, foi realizado o teste de raiz unitária (RU). Para testar se a série possui raiz unitária foram aplicados os testes Dickey-Fuller aumentado (ADF) e Phillips-Perron (PP). A Tabela-2 apresenta, para a categoria IND, os resultados dos testes ADF e PP para as séries do log do preço sem tendência, denominadas por  $\ln(P) - \mu t$ , e da primeira diferença da série,  $d[\ln(P) - \mu t]$ .

Estatísticas do teste ADF para as séries $\ln(P) - \mu t$ e para $d[\ln(P) - \mu t]$			
	IND LOW	IND MID	IND HIG
$\ln(P) - \mu t$	-3,088169	-2,965185	-2,783717
$d[\ln(P) - \mu t]$	-54,50694	-48,99607	-48,39855
valores críticos 1%	valores críticos 5%		valores críticos 10%
-3,4357	-2,8631		-2,5676
Estatísticas do teste PP para as séries $\ln(P) - \mu t$ e para $d[\ln(P) - \mu t]$			
	IndLow	IndMid	IndHig
$\ln(P) - \mu t$	-3,106735	-3,367188	-3,219470
$d[\ln(P) - \mu t]$	-54,50095	-49,27730	-48,32318
valores críticos 1%	valores críticos 5%		valores críticos 10%
-3,4325	-2,8624		-2,5673

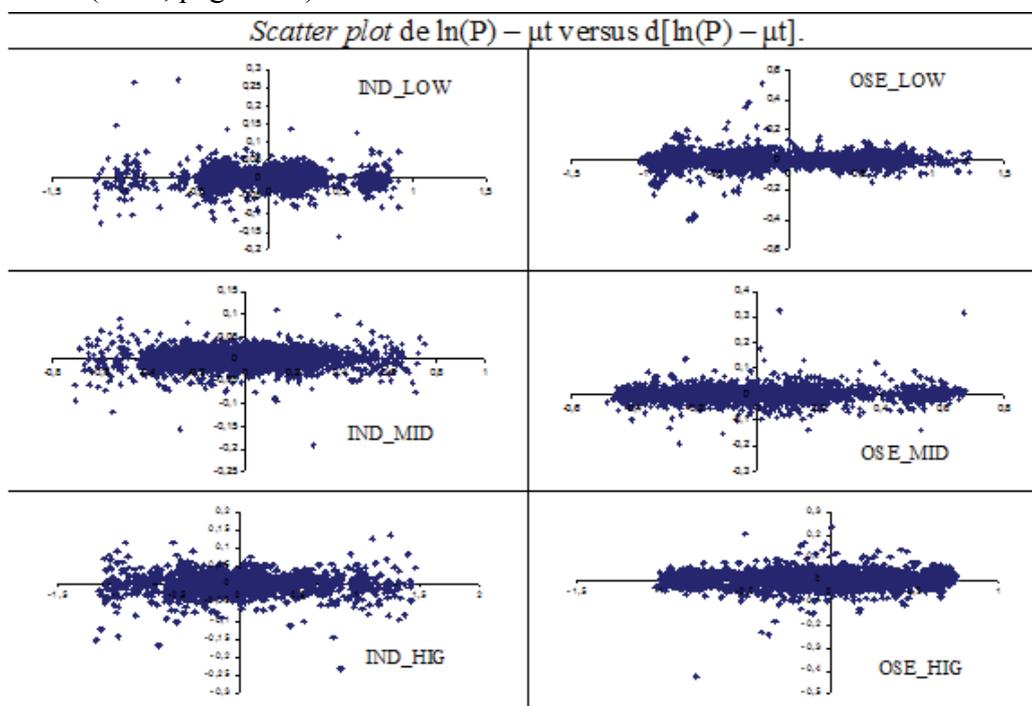
Tabela-2 Tabela Conjunta dos Resultados do Teste ADF para RU para o portfólio IND.

A Tabela-3 apresenta os resultados dos testes ADF e PP para a categoria OSE. Verifique, facilmente, que tanto no caso das séries do portfólio IND, quanto no OSE a hipótese de RU é rejeitada para os níveis de 1, 5 e 10% para todas as séries  $d[\ln(P) - \mu t]$ . A Figura-4 apresenta um *scatter plot* para cada um dos seis portfólios. No eixo horizontal tem-se o logaritmo dos preços sem tendência, enquanto que o eixo vertical apresenta os retornos.

Estatísticas do teste ADF para as séries $\ln(P) - \mu t$ e para $d[\ln(P) - \mu t]$			
	OSE_LOW	OSE MID	OSE_HIG
$\ln(P) - \mu t$	-0,210505	-1,326683	-1,988611
$d[\ln(P) - \mu t]$	-15,26855	-54,32053	-50,10002
valores críticos 1%	valores críticos 5%	valores críticos 10%	
-3,4357	-2,8631	-2,5676	
Estatísticas do teste PP para as séries $\ln(P) - \mu t$ e para $d[\ln(P) - \mu t]$			
	OSELOW	OSEMID	OSEHIG
$\ln(P) - \mu t$	-0,751931	-0,975846	-1,853958
$d[\ln(P) - \mu t]$	-93,64150	-54,81179	-50,00763
valores críticos 1%	valores críticos 5%	valores críticos 10%	
-3,4325	-2,8624	-2,5673	

**Tabela-3** Tabela Conjunta dos Resultados do Teste ADF para RU para o portfólio OSE.

Na Figura-4 pode-se verificar que os preços de mercado de IND e OSE movem-se em torno de pontos de equilíbrio de maneira aleatória. Isso representa a possibilidade da existência de uma dinâmica caótica no mercado de preços de ações. No entanto, calculando-se os expoentes de Lyapunov encontram-se valores negativos. Isso implica que os preços de mercado das ações não podem ser caóticos, mas ao invés disso serem caracterizados por um processo de difusão. Não será utilizado aqui o jargão e o tratamento do cálculo estocástico para esta questão, o leitor pode encontrar em Duffie (2001, página 87), em Campbell *et al.* (1997, página 356) uma introdução simples ao assunto, uma leitura mais avançada de como trabalhar com processos de difusão pode ser obtida em Steele (2000, página 169) e em Di Nunno *et al.* (2009, página 17).



**Figura-4** *Scatter plot* para cada um dos seis portfólios.

### 4.3 Resultados das Redes Neurais e Expoentes de Lyapunov

Para analisar a estabilidade das ações dos portfólios, são utilizadas redes neurais artificiais alimentadas adiante (*feedforward*) com o algoritmo de Gencay e Dechert (1992) para calcular os expoentes de Lyapunov. A obtenção dos expoentes de Lyapunov foi realizada

utilizando-se o software NETLE, que funciona na plataforma MS-DOS e foi desenvolvido por Kuan, Liu e Gencay (1997) e utiliza redes neurais *feedforward*.

A camada de entrada (*inputs*) da rede neural consiste da variável a ser modelada com um instante de atraso (defasagem) e uma defasagem do IBOVESPA para todos os seis portfólios.

Resultados do NETLE para $\ln(P) - \mu t$									
Resultados para IND_LOW versus Ibovespa					Resultados para OSE_LOW versus Ibovespa				
Camada Oculta	MSE	SIC	Expoentes de Lyapunov		Camada Oculta	MSE	SIC	Expoentes de Lyapunov	
			Lambda (1)	Lambda (2)				Lambda (1)	Lambda (2)
4	0,405E-03	-7,7649	0,0110	-4,4587	4	0,356E-03	-7,8135	0,0096	-3,9124
5	0,391E-03	-7,7894	0,0144	-3,6009	5	0,343E-03	-7,8321	0,0103	-3,7643
6	0,384E-03	-7,7947	0,0117	-5,0551	6	0,321E-03	-7,8411	0,0112	-4,3956
7	<b>0,380E-03</b>	<b>-7,7951</b>	<b>0,0127</b>	<b>-3,7351</b>	7	<b>0,301E-03</b>	<b>-7,8371</b>	<b>0,0104</b>	<b>-4,5373</b>
Resultados para IND_MID versus Ibovespa					Resultados para OSE_MID versus Ibovespa				
Camada Oculta	MSE	SIC	Expoentes de Lyapunov		Camada Oculta	MSE	SIC	Expoentes de Lyapunov	
			Lambda (1)	Lambda (2)				Lambda (1)	Lambda (2)
4	0,654E-03	-7,2341	0,0132	-5,1328	4	0,433E-03	-7,6673	0,0121	-4,9453
5	<b>0,621E-03</b>	<b>-7,2300</b>	<b>0,0127</b>	<b>-4,3193</b>	5	0,432E-03	-7,6543	0,0134	-4,8897
6	0,646E-03	-7,2043	0,0115	-4,5791	6	0,429E-03	-7,6129	0,0128	-5,0128
7	0,637E-03	-7,1857	0,0120	-5,0432	7	<b>0,418E-03</b>	<b>-7,6494</b>	<b>0,0118</b>	<b>-5,1452</b>
Resultados para IND_HIG versus Ibovespa					Resultados para OSE_HIG versus Ibovespa				
Camada Oculta	MSE	SIC	Expoentes de Lyapunov		Camada Oculta	MSE	SIC	Expoentes de Lyapunov	
			Lambda (1)	Lambda (2)				Lambda (1)	Lambda (2)
4	0,521E-03	-7,5101	0,0135	-4,7785	4	0,297E-03	-8,0768	0,0133	-4,9965
5	0,518E-03	-7,4973	0,0121	-5,7698	5	<b>0,277E-03</b>	<b>-8,0921</b>	<b>0,0125</b>	<b>-5,1503</b>
6	<b>0,509E-03</b>	<b>-7,4832</b>	<b>0,0108</b>	<b>-4,9548</b>	6	0,286E-03	-8,0442	0,0141	-5,6542
7	0,514E-03	-7,4778	0,0111	-6,2831	7	0,287E-03	-8,0813	0,0127	-6,0035

**Tabela-4** - Resultados obtidos pelo NETLE para para  $\ln(P) - \mu t$  de todos os seis grupos de portfólios.

Antes de definir as variáveis de entrada, houve necessidade de escolher um fator que explicasse e estivesse correlacionado com os retornos das ações, ou seja, definir a variável que serviria de *proxy* de mercado para os dados econômicos (WOOLDRIDGE, 2003). Optou-se pelo uso do IBOVESPA. Portanto, sem focar de maneira excessiva na melhor rede neural, a entrada foi definida como sendo formada por uma defasagem na variável (IND ou OSE) e uma defasagem do IBOVESPA para todos os seis portfólios analisados.

A escolha da melhor RNA foi obtida através de uma variação do número de neurônios da camada intermediária de 4 a 7, sendo utilizado como critério o menor valor de erro quadrático médio (*mean squared error* – MSE). As Tabelas-5 e 6 fornecem os valores de MSE das previsões das RNA, o critério de informação de Schwarz (SIC) e os expoentes de Lyapunov. Os expoentes de Lyapunov obtidos para as séries  $\ln(P) - \mu t$  (Tabela-4) estão todos próximos de zero, o que indica a presença de uma raiz unitária. Realizando a primeira diferença da série, ou seja, obtendo uma série do tipo DIF\_DETREND\_LN\_SÉRIE, remove-se a não estacionariedade e os expoentes de Lyapunov na Tabela-6 são negativos, indicando processos não caóticos e estáveis. Ou seja, não é considerada a existência de uma dinâmica instável (caótica) nas séries temporais uma vez que todas as estimativas dos maiores expoentes de Lyapunov são negativos.

Modelos em negrito foram escolhidos com base nos menores valores de MSE. Neste ponto vale lembrar que o MSE e o SIC são respectivamente dados por:

$$MSE = \sum_{t=T+1}^{T+h} \frac{(\hat{y}_t - y_t)^2}{h} \quad (8)$$

Quanto menor a raiz quadrada do MSE (RMSE), implica em menor o erro obtido pelo modelo utilizado para realizar a previsão. Quando um modelo é ajustado para uma dada série temporal, é necessário verificar se o modelo apresenta uma adequada descrição dos dados. Um dos critérios freqüentemente usados que reflete a qualidade do ajuste e o número de parâmetros estimado é o Critério de Informação Bayesiano de Schwartz (SIC). Se  $k$  é o número total de parâmetros estimado, tem-se que:

$$SIC(k) = n \log \hat{\sigma}^2 + k \log n \quad (9)$$

Sendo que  $n$  é o tamanho da amostra. Se  $RSS = \sum \hat{\varepsilon}_i^2$  é a soma dos resíduos quadrados, então  $\hat{\sigma}^2 = RSS / (n - k)$ . Portanto, utilizando os critérios mencionados, nas Tabelas-4 e 5 têm-se as melhores redes neurais selecionadas e os respectivos valores de expoentes de Lyapunov calculados por essas RNA. A estimação de expoentes de Lyapunov usando redes neurais *feedforward* pode ser encontrada em outros estudos, tais como, Dechert e Gencay (2000), Gencay e Dechert (1996), McCaffrey *et al.* (1992) e Nychka *et al.* (1992).

Na Tabela-5 também vale o fato de que os modelos em negrito foram escolhidos com base nos menores valores de MSE.

Resultados do NETLE para $d[\ln(P) - \mu t]$									
Resultados para IND LOW versus Ibovespa					Resultados para OSE LOW versus Ibovespa				
			Expoentes de Lyapunov					Expoentes de Lyapunov	
Camada Oculta	MSE	SIC	Lambda (1)	Lambda (2)	Camada Oculta	MSE	SIC	Lambda (1)	Lambda (2)
4	0,439E-03	-7,6835	-2,2589	-2,7081	4	0,465E-03	-8,1432	-2,7249	-2,9433
5	0,437E-03	-7,6759	-2,0727	-2,5415	5	0,457E-03	-8,1326	-2,3890	-2,8763
6	0,428E-03	-7,6859	-1,7971	-2,0562	6	0,453E-03	-8,1508	-2,7413	-1,2974
7	<b>0,429E-03</b>	<b>-7,6737</b>	<b>-2,3896</b>	<b>-2,7417</b>	7	<b>0,449E-03</b>	<b>-8,1445</b>	<b>-2,9421</b>	<b>-2,3882</b>
Resultados para IND MID versus Ibovespa					Resultados para OSE MID versus Ibovespa				
			Expoentes de Lyapunov					Expoentes de Lyapunov	
Camada Oculta	MSE	SIC	Lambda (1)	Lambda (2)	Camada Oculta	MSE	SIC	Lambda (1)	Lambda (2)
4	<b>0,674E-03</b>	<b>-7,265</b>	<b>-1,3451</b>	<b>-2,8732</b>	4	0,532E-03	-7,8763	-2,8424	-1,4047
5	0,692E-03	-7,259	-2,0987	-2,7651	5	0,526E-03	-7,8546	-2,3667	-2,4803
6	0,676E-03	-7,241	-2,0672	-2,8091	6	<b>0,521E-03</b>	<b>-7,8394</b>	<b>-2,5235</b>	<b>-2,7142</b>
7	0,684E-03	-7,237	-2,4311	-2,7984	7	0,531E-03	-7,8622	-2,8106	-2,1960
Resultados para IND HIG versus Ibovespa					Resultados para OSE HIG versus Ibovespa				
			Expoentes de Lyapunov					Expoentes de Lyapunov	
Camada Oculta	MSE	SIC	Lambda (1)	Lambda (2)	Camada Oculta	MSE	SIC	Lambda (1)	Lambda (2)
4	0,567E-03	-7,541	-2,0041	-2,3459	4	0,245E-03	-8,3679	-2,3267	-2,5008
5	0,559E-03	-7,531	-2,0123	-2,4218	5	0,236E-03	-8,3554	-2,9706	-1,8331
6	<b>0,538E-03</b>	<b>-7,518</b>	<b>-1,8761</b>	<b>-2,4783</b>	6	<b>0,227E-03</b>	<b>-8,3623</b>	<b>-2,7696</b>	<b>-2,8444</b>
7	0,541E-03	-7,504	-1,996	-2,3965	7	0,233E-03	-8,3644	-2,9817	-2,6514

Tabela-5 - Resultados obtidos pelo NETLE para  $d[\ln(P) - \mu t]$  de todos os seis grupos de portfólios.

#### 4.4 Racionalidade e Desempenho de Previsão

Enquanto que expectativas adaptativas são baseadas em preços passados, as expectativas racionais são formadas com base em toda a informação disponível, e portanto, mais difíceis de serem modeladas.

Neste trabalho definem-se as previsões racionais, simplesmente como sendo aquelas que não apresentam erros sistemáticos de previsão: o erro médio é indistinguível de possuir valor zero e os erros não apresentam padrão consistente ao longo do tempo. De acordo com

este critério, pode-se verificar na Tabela-6 para o caso do portfólio de empresas da indústria, que os modelos de RNA e os modelos ARMA(1,1) para IND\_LOW e IND\_HIG são racionais. Continuando, tendo como base os resultados da Tabela-6, pode-se verificar que para o modelo ARMA(1,1) para IND\_MID e os três modelos Naive exibem padrão de autocorrelação dos resíduos. Nesses casos, em termos econométricos, diz-se que estes modelos estão mal especificados, eles poderiam ser melhor descritos por modelos ARMA(p, q) de diferentes ordens.

ARMA																		
		IND_LOW				IND_MID				IND_HIG								
Desv Pad		1,74E-06				2,37932E-05				5,66 E-07								
Média		0,049649				0,004359338				0,004717								
IND_LOW				IND_MID				IND_HIG										
Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
1	1	1	0,003	0,003	1,1098	0,28	1	0,466	0,466	35,407	0,000	1	1	1	0,021	0,021	0,0705	0,791
2	1	1	0,249	0,243	11,263	0,004	2	0,194	-0,042	40,578	0,000	2	1	1	0,263	0,263	10,686	0,006
3	1	1	0,185	0,160	16,905	0,001	3	0,093	0,030	42,417	0,000	3	1	1	0,162	-0,172	14,384	0,002
4	1	1	0,227	0,167	25,503	0,000	4	0,030	-0,024	42,686	0,000	4	1	1	0,164	0,112	18,322	0,001
5	1	1	0,069	-0,021	28,296	0,000	5	0,018	0,018	42,678	0,000	5	1	1	0,000	0,072	18,322	0,003
6	1	1	0,174	0,067	31,398	0,000	6	0,002	-0,014	42,678	0,000	6	1	1	0,115	0,023	20,554	0,009
7	1	1	0,064	-0,013	32,059	0,000	7	0,002	0,008	42,679	0,000	7	1	1	0,007	0,029	20,563	0,004
8	1	1	0,025	-0,016	32,011	0,000	8	-0,002	-0,006	42,679	0,000	8	1	1	0,064	0,027	21,250	0,006
9	1	1	0,044	-0,011	32,634	0,000	9	-0,001	0,003	42,679	0,000	9	1	1	0,047	0,053	21,631	0,010
10	1	1	0,140	0,113	35,800	0,000	10	-0,002	-0,004	42,620	0,000	10	1	1	0,061	0,028	22,280	0,014
11	1	1	-0,007	-0,018	36,810	0,000	11	-0,002	0,001	42,621	0,000	11	1	1	0,044	0,023	22,622	0,020
12	1	1	0,035	-0,019	36,126	0,000	12	-0,002	-0,002	42,622	0,000	12	1	1	0,010	-0,012	22,629	0,091
13	1	1	0,016	-0,021	36,170	0,001	13	-0,002	0,001	42,622	0,000	13	1	1	0,034	0,019	22,847	0,044
14	1	1	-0,060	-0,063	38,620	0,001	14	-0,003	-0,003	42,624	0,000	14	1	1	-0,068	-0,085	23,659	0,050
15	1	1	0,012	0,018	38,647	0,001	15	-0,003	0,000	42,626	0,000	15	1	1	0,092	0,080	25,159	0,048
Rede Neural																		
		IND_LOW				IND_MID				IND_HIG								
Desv Pad		0,041555				0,004326999				0,00360005								
Média		-0,000907				-8,33269E-05				-0,000315036								
IND_LOW				IND_MID				IND_HIG										
Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
1	1	1	0,845	0,845	0,3288	0,566	1	-0,847	-0,847	0,3649	0,546	1	1	1	0,812	0,812	0,8224	0,881
2	1	1	0,831	0,839	0,4847	0,785	2	0,114	0,112	2,5143	0,284	2	1	1	-0,871	-0,871	0,8442	0,656
3	1	1	-0,838	-0,840	0,7170	0,888	3	0,181	0,185	3,8888	0,207	3	1	1	0,824	0,828	0,8442	0,815
4	1	1	-0,888	-0,885	1,4342	0,838	4	-0,188	-0,187	9,4821	0,050	4	1	1	-0,888	-0,885	1,8880	0,818
5	1	1	-0,853	-0,846	1,9130	0,851	5	-0,881	-0,885	10,591	0,050	5	1	1	-0,881	-0,885	1,7880	0,818
6	1	1	-0,847	-0,841	2,2821	0,832	6	0,820	0,856	10,656	0,100	6	1	1	-0,846	-0,847	2,1315	0,948
7	1	1	-0,811	-0,808	2,3888	0,841	7	-0,851	0,816	11,884	0,136	7	1	1	0,822	0,816	2,2855	0,808
8	1	1	0,824	0,820	2,4881	0,896	8	0,185	0,177	12,862	0,121	8	1	1	0,884	0,881	2,8886	0,840
9	1	1	0,842	0,832	2,7839	0,975	9	-0,880	-0,821	14,849	0,121	9	1	1	-0,811	-0,810	2,9302	0,987
10	1	1	0,854	0,842	3,1935	0,976	10	-0,118	-0,163	16,444	0,888	10	1	1	-0,837	-0,835	3,1643	0,977
11	1	1	-0,828	-0,826	3,3169	0,896	11	-0,881	-0,882	16,444	0,125	11	1	1	-0,883	-0,884	3,6625	0,846
12	1	1	-0,801	-0,800	4,8840	0,973	12	-0,843	-0,867	16,788	0,168	12	1	1	-0,881	-0,881	4,8828	0,888
13	1	1	0,843	0,841	4,7813	0,980	13	0,818	0,838	18,834	0,207	13	1	1	-0,810	-0,811	4,8782	0,882
14	1	1	-0,848	-0,839	5,1933	0,983	14	0,888	-0,881	16,846	0,264	14	1	1	-0,853	-0,852	5,3860	0,901
15	1	1	0,827	0,827	5,3312	0,989	15	-0,884	-0,857	16,848	0,328	15	1	1	-0,839	-0,853	5,5821	0,986
Naive																		
		IND_LOW				IND_MID				IND_HIG								
Desv Pad		0,057580986				0,006148003				0,00508067								
Média		4,64304E-05				-4,04939E-05				-1,93483E-05								
IND_LOW				IND_MID				IND_HIG										
Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelação	Correlação Parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
1	1	1	-0,495	-0,495	39,905	0,000	1	-0,674	-0,674	63,641	0,000	1	1	1	-0,487	-0,487	36,822	0,000
2	1	1	0,030	-0,280	40,069	0,000	2	0,108	-0,333	66,488	0,000	2	1	1	-0,074	-0,373	36,422	0,000
3	1	1	-0,021	-0,203	40,143	0,000	3	0,099	-0,018	57,101	0,000	3	1	1	0,064	-0,235	37,085	0,000
4	1	1	-0,018	-0,179	40,194	0,000	4	-0,162	-0,099	61,437	0,000	4	1	1	0,012	-0,140	37,113	0,000
5	1	1	0,001	-0,156	40,195	0,000	5	-0,015	-0,251	61,474	0,000	5	1	1	-0,044	-0,140	37,437	0,000
6	1	1	-0,016	-0,160	40,236	0,000	6	0,082	-0,182	62,811	0,000	6	1	1	-0,026	-0,173	37,639	0,000
7	1	1	0,001	-0,158	40,237	0,000	7	-0,104	-0,176	64,434	0,000	7	1	1	0,013	-0,180	37,696	0,000
8	1	1	0,010	-0,148	40,256	0,000	8	0,162	0,047	68,919	0,000	8	1	1	0,083	-0,107	38,042	0,000
9	1	1	0,002	-0,128	40,258	0,000	9	-0,069	0,060	69,735	0,000	9	1	1	-0,019	-0,070	38,103	0,000
10	1	1	0,063	-0,089	40,549	0,000	10	-0,067	-0,111	70,508	0,000	10	1	1	0,024	0,008	38,205	0,000
11	1	1	-0,038	0,018	41,127	0,000	11	0,072	-0,132	71,414	0,000	11	1	1	-0,096	-0,122	38,813	0,000
12	1	1	-0,077	-0,067	42,168	0,000	12	-0,034	-0,045	71,612	0,000	12	1	1	0,098	-0,087	40,997	0,000
13	1	1	0,107	0,020	44,186	0,000	13	0,038	0,121	71,881	0,000	13	1	1	0,016	-0,089	40,809	0,000
14	1	1	-0,089	-0,038	45,567	0,000	14	-0,014	0,070	71,918	0,000	14	1	1	-0,089	-0,102	41,233	0,000
15	1	1	0,035	-0,029	45,788	0,000	15	0,016	0,021	71,966	0,000	15	1	1	0,074	-0,088	42,201	0,000

Tabela-6 Resultados do Teste de Racionalidade para o portfólio IND.

Foram aplicados o mesmo conceito e a mesma técnica para as empresas do portfólio OSE, os resultados são apresentados na Tabela-7 de forma mais resumida sem os correlogramas. Para o portfólio OSE\_LOW os modelos de redes neurais e ARMA(1,1) desempenharam padrão racional, enquanto os modelos ARMA(1,1) para OSE\_MID e OSE\_HIG e Naive geraram erros de previsão sistemáticos.

Considere  $y$  como sendo uma variável econômica ou financeira a qual os agentes desejam prever, e seja  $y_{t,t+n}$  a esperança para  $y$  no tempo  $t + n$ , formada no tempo  $t$  usando

informação até o tempo  $t$ . Então, se as expectativas são racionais, no sentido de Muth (1961) tem-se:

$$y_{t,t+n} = E[y_{t+n} | I_t] \quad (10)$$

onde  $I_t$  é o conjunto de informações no tempo  $t$ , e  $E[. | I_t]$  é o operador de esperança matemática condicionado a  $I_t$ . Tem-se que  $y_{t+n}$  pode ser escrita como a soma de seu valor esperado mais um erro de previsão da expectativa racional, chamado aqui de  $\varepsilon_{t+n}$ , assim:

$$y_{t+n} = y_{t,t+n} + \varepsilon_{t+n} \quad (11)$$

Tomando a esperança condicional da equação anterior condicionada a  $I_t$ , tem-se:

$$E[\varepsilon_{t+n} | I_t] = 0 \quad (12)$$

Esta esperança (12) é uma propriedade fundamental da expectativa racional, e algumas vezes é chamada de condição de ortogonalidade (TAYLOR, 1987). As Tabelas-6 e 7 apresentam os valores das médias dos resíduos das previsões para cada uma das variáveis analisadas, e além disso também são apresentados os valores de auto-correlações para permitir a conclusão a cerca da racionalidade.

O modelo Naive representa expectativas adaptativas, utilizando somente a informação passada. As redes neurais estão mais próximas das expectativas racionais, uma vez que incorporam uma maior quantidade de informação, e os modelos ARMA falham em algum momento gerando três modelos com características racionais e três modelos irracionais.

ARMA			
	OSE LOW	OSE MID	OSE HIG
Desv_Pad	1,352E-05	3,746E-05	3,912E-06
Média	0,007381	0,006548	0,005182
Autocorrelação	0,0326	-0,4326	-0,5104
Rede Neural			
	OSE LOW	OSE MID	OSE HIG
Desv_Pad	0,007651	0,0033176	0,002553
Média	-0,000214	-4,66422E-06	-0,00021145
Autocorrelação	0,0133	0,1142	-0,09541
Naive			
	OSE LOW	OSE MID	OSE HIG
Desv_Pad	0,063421	0,007223517	0,00600987
Média	7,322145E-05	-6,83271E-05	-3,76124E-05
Autocorrelação	0,4462	0,3971	0,5035

Tabela-7 Resultados do Teste de Racionalidade para o portfólio OSE.

Foi considerado o modelo ARMA(1,1) para todos os seis portfólios, o que possibilitou determinar três modelos como sendo modelos possivelmente irracionais, ou seja, aqueles com erros sistemáticos de previsão. Os resultados das previsões obtidas pelos modelos de RNA, ARMA e Naive são mostrados na Tabela-8. Como critérios de avaliação da melhor previsão são utilizados o RMSE (*root mean square error*) e o TIC (*Theil inequality coefficient*), dados respectivamente por:

$$RMSE = \sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} \frac{(\hat{y}_t - y_t)^2}{h}} \quad (13)$$

$$TIC = \sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} \frac{(\hat{y}_t - y_t)^2}{h}} / \left( \sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} \frac{\hat{y}_t^2}{h}} + \sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} \frac{y_t^2}{h}} \right) \quad (14)$$

O TIC varia entre zero e um, sendo que zero indica ajuste perfeito. Quanto menor o RMSE significa menor o erro obtido pelo modelo utilizado para realizar a previsão.

Avaliando os resultados de RMSE e TIC para as previsões obtidas pelos métodos de redes neurais, auto-regressivo de média móvel e Naive, verificou-se que as RNA apresentaram os melhores resultados, excetuando-se os casos IND\_MID e OSE\_LOW em que os modelos ARMA obtiveram menor RMSE e TIC, respectivamente.

Desempenho de Previsão dos Modelos						
RMSE						
	IND LOW	IND MID	IND HIG	OSE LOW	OSE MID	OSE HIG
ARMA	0,041608	<b>0,004279</b>	0,003611	0,033218	0,003967	0,004692
Rede Neural	<b>0,041435</b>	0,004314	<b>0,003603</b>	<b>0,024516</b>	<b>0,003843</b>	<b>0,004561</b>
Naive	0,057401	0,006129	0,005065	0,060131	0,007442	0,006283
TIC						
	IND LOW	IND MID	IND HIG	OSE LOW	OSE MID	OSE HIG
ARMA	0,055349	<b>0,002200</b>	0,001859	<b>0,045772</b>	0,002432	0,002139
Rede Neural	<b>0,055134</b>	0,002219	<b>0,001855</b>	0,045986	<b>0,002428</b>	<b>0,002099</b>
Naive	0,076060	0,003152	0,002607	0,069910	0,003734	0,003205

Tabela-8 RMSE e TIC para previsões dos portfólios IND e OSE.

## 5. Conclusão

Neste trabalho foi apresentado um método de determinação de estabilidade no preço de ações do mercado brasileiro. O trabalho abrangeu um período anterior a crise financeira global de 2008 que teve como principal fator a crise do *subprime* (ou hipotecas de risco) nos Estados Unidos.

Foram analisadas trinta empresas, divididas em dois portfólios, ou categorias, uma denominada de Indústria (IND) e a outra chamada de Outros Setores (OSE) contemplando empresas do setor de energia, financeiro e varejo. Foram encontradas evidências de não estacionariedade nos dados, o que levou a ter que transformar os dados para não incorrer em problemas de previsão devido à variância crescente. Também verificou-se não-linearidade nos dados, mas com evidências insuficientes de padrões determinísticos que possibilitasse concluir sobre a estabilidade dos preços das ações.

Pode-se concluir que, após as transformações necessárias, os modelos de previsão que utilizam redes neurais mostraram-se um pouco melhores do ponto de vista de racionalidade.

A sofisticação de um modelo pode inicialmente ser definida em termos da precisão *ex-post* (por exemplo, o RMSE) mas, além disso pode-se também considerar a compreensão do conjunto de informação. O modelo Naive é baseado na quantidade mínima de informação e tem a menor taxa de precisão entre as três classes de modelos considerados. A rede neural possui a maior compreensão do conjunto de informação porque inclui vários valores de retornos passados, bem como os retornos defasados do IBOVESPA. Dessa forma, a rede neural é em média cerca de 37% mais precisa que as previsões Naive em termos do RMSE. Os modelos ARMA variam com respeito à precisão, verificando-se que em média as RNA são 5% mais precisas que as previsões geradas pelos modelos ARMA.

Os testes de racionalidade foram realizados considerando-se modelos ARMA, porém dadas as características das séries financeiras apresentarem heterocedasticidade condicional, estes testes podem ser estendidos através do uso de modelos ARIMA-GARCH. Da mesma forma, outras topologias de redes neurais treinadas com diferentes algoritmos (por exemplo, usando filtro de Kalman) também podem oferecer novos resultados e novas discussões.

## 6. Referência Bibliográfica

ANUFRIEV, M. e DINDO, P. Wealth Selection in a Financial Market with Heterogeneous Agents, 2007.

- AZZOF, E. M. *Neural Network Time Series Forecasting of Financial Markets*, John Wiley & Sons, 1994.
- BASKA, M. , LIUB, T. e WIDERBERGC, A. The stability of electricity prices: Estimation and inference of the Lyapunov exponents, *Physica A*, 2006.
- BROCK, W. A. A Test for Independence Based on the Correlation Dimension. *Econometric Reviews*, v. 15, p. 197-235, 1996.
- BROCK, W., e C. HOMMES A Rational Route to Randomness, *Econometrica*, 65, 1059–1095, 1997.
- BROCK, W., e C. HOMMES Heterogeneous Beliefs and Routes to Chaos in a Simple Asset Pricing Model, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22, 1235–1274, 1998.
- BROCK, W., C. HOMMES, e F. WAGENER Evolutionary Dynamics in Markets with Many Trader Types, *Journal of Mathematical Economics*, 41, 7–42, 2005.
- CAMERER, C. Individual decision making, *Handbook of Experimental Economics*, Princeton University Press, 1995.
- CAMPBELL, J. Y. LO, A. W. e MACKINLAY, A. C. *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, 1997.
- DECHERT, W. D. e GENCAI, R. Is the largest Lyapunov exponent preserved in embedded dynamics? *Phys. Lett. A*, 276, p. 59–64, 2000.
- Di NUNNO, G., OKSENDAL, B. e PROSKE, F. *Malliavin Calculus for Levy Processes with Applications to Finance*, Springer, 2009.
- DUDA, R. e HART, P. *Pattern Classification and Scene Analysis*. Segunda edição, John Wiley, New York, 1993.
- DUFFIE, D. *Dynamic asset pricing*, Princeton, 2001.
- FERNANDES, M.; PREUMONT, Y. P. The finite-sample size of the BDS test for GARCH standardized residuals. *Working Paper*, 2003.
- FORBES, W. *Behavioural Finance*, Wiley, 2009.
- GAUNERSDORFER, A. Endogenous Fluctuations in a Simple Asset Pricing Model with Heterogeneous Agents, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24, 799–831, 2000.
- GENCAI, R e DECHERT, W. D. An Algorithm for n Lyapunov Exponentes of na n-Dimensional Unknown System. *Physica D* v. 59, p. 142-157, 1992.
- GENCAI, R. e DECHERT, W.D. The identification of spurious Lyapunov exponents in Jacobian algorithms, *Stud. Nonlinear Dyn. Econometrics* 1 (3), 1996.
- GILOVICH, T., D. GRIFFIN e D. KAHNEMAN, *Heuristics and Biases: The Psychology of Intuitive Judgment*, Cambridge University Press, 2002.
- GRANDMONT, J. M. Expectations Formation and Stability of Large Socioeconomic Systems, *Econometrica*, 66(4), p. 741–781, 1998.
- HIRSHLEIFER, D. Investor Psychology and Asset Pricing. *Journal of Finance*, v. 56, no. 45, p. 1533-1597, 2001.
- HOMMES, C. Heterogeneous Agent Models in Economics and Finance, *Handbook of Computational Economics*, v. 2, 2006.

- HSIEH, D. Testing for Nonlinear Dependence in Daily Foreign Exchange Rates, *Journal of Business*, 62(3), p. 339-368, 1989.
- HSIEH, D. Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets, *Journal of Business*, v. 5, p. 1839-1877, 1991.
- KAHNEMAN, D., e TVERSKY, A. Judgment under uncertainty: heuristics and biases, *Science* 185, p. 1124–1131, 1974.
- KAHNEMAN, D., e TVERSKY, A. *Choices, Values and Frames*, Cambridge University Press, 2000.
- KUAN, C. e LIU, T. Forecasting Exchange Rates Using Feedforward and Recurrent Neural Networks. *Journal of Applied Econometrics*, v. 10, n. 4, p. 347-364, 1995.
- KUAN, C., LIU, T. e GENCAI, R. *Netle*, 1997.
- LEE, T. H., WHITE H. e GRANGER, W. J. Testing for Neglected Nonlinearity in Time Series Models. *Journal of Econometrics*, v. 56, p. 269-290, 1993.
- MARCONI, M. A. e LAKATOS, E. M. *Metodologia Científica*, Atlas, 2007.
- MAXIMIANO, A. C. A. *Teoria Geral da Administração Da Escola Científica à Competitividade em Economia Globalizada*, Atlas, 1997.
- McCAFFREY, D., ELLNER, S., GALLANT, A.R. e NYCHKA, D. Estimating the Lyapunov exponent of a chaotic system with nonparametric regression, *J. Am. Stat. Assoc.*, v. 87, p. 682–695, 1992.
- MUTH, J. F. Rational Expectations and the Theory of Price Movements, *Econometrica*, v. 29, p. 315-335, 1961.
- NYCHKA, D., ELLNER, S., GALLANT, A.R. e MCCAFFREY, D. Finding chaos in noisy systems, *J. R. Stat. Soc.*, v. B 54, p. 399–426, 1992.
- POMPIAN, M. M. *Behavioral Finance and Wealth Management: How to Build Optimal Portfolios That Account for Investor Biases*, Wiley Finance, 2006.
- RABIN, M. Psychology and economics, *Journal of Economic Literature* v. 36, p. 11–46, 1998.
- STEELE, M. *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer-Verlag, 2000.
- TABAK, B. M., FERNANDES, J.L.B. FERNANDES e PEÑA, J. I. Behavior Finance and Estimation Risk in Stochastic Portfolio Optimization, *BCB-Working Paper Series 184*, 2009.
- TAYLOR, M. P. Learning and Rationality: na Empirical Study of Investment Manager's Stock Market Predictions, *Annales D'Économie et de Statistique*, n. 8, 1987.
- WEIGEND, A. S., B. A. HUBERMAN, e D. E. RUMELHART. Predicting the Future: A Connectionist Approach. *International Journal of Neural Systems*, v. 1, 1990.
- WILKENS, K., THOMAS, N. D. e FOFANA, M. S. Stability of Technology Stock Prices: Evidence of Rational Expectations or Irrational Sentiment?, *Managerial Finance*, v. 30, 2004.
- WOLF, A. SWIFT, J., SWINNEY, H., VASTANDO, J., Determining Lyapunov Exponent from a Time Series. *Physica D*, p. 285-317, 1985.
- WOOLDRIDGE, J. M. *Introductory Econometrics: A Modern Approach*, 2nd Edition, Thomson- South- Western, 2003.